ОЦЕНКА ТЕМПА ВОСПРОИЗВОДСТВА СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Показатель темпа воспроизводства r_0 в модели стабильного населения является одной из основных характеристик демографического процесса. Математический анализ модели стабильного населения восходит к классическим работам Лотка[1]. Вопросы вычисления r_0 продолжают обсуждаться и в последнее время, например, в ряде работ венгерских авторов[2].

Известно, что r_0 определяется из уравнения:

$$1 = H(r_0) = \int_a^b \varphi(y)\, l(y)\, e^{-r_0 y} dy \qquad /1/$$

Здесь: $\varphi(y)dy$ – количество рождений живых девочек, приходящихся на одну женщину возраста $(y, y+dy)$, $l(y)$ – функция выживания женского населения. Обычно a = 15 лет, b = 50 лет.

Модель стабильного населения как в настоящий исторический период, так и в ряде периодов прошлого сильно идеализирует реальность[3]. Тем не менее модель стабильного насе-

1/ A.J.Lotka. Principles of the Phisical Biology, Baltimore, 1925; On the true rate of natural increase. Journal of the American Statistical Association, vol.20, N 83, 1925; Population analysis as a chapter in the mathernatical theory of evolution.: Oxford, 1945.

2/ Дьюла Барши, Эде Тейс. "Расчеты воспроизводства населения на основе показателей замещения поколений и модели стабильного населения". – В сб. "Методы демографических исследований", М., "Статистика", 1969. Дьердь Букович. "Некоторые проблемы анализа воспроизводства населения". – В сб. "Теоретические проблемы демографии", М., "Статистика", 1970.

3/ Более реальные модели с переменным темпом воспроизводства населения рассматриваются в работе "К теории прогнозирования демоэкономических движений". – В ж. "Экономика и математические методы" № 3, 1970.

ления остается полезным инструментом для ряда качественных выводов, краткосрочных прогнозов, а при соответствующем вероятностном обобщении[1] может претендовать и на адекватное отражение реальности / каждый год – свое "стабильное население", последовательность лет – случайная стационарная или нестационарная последовательность темпов r_0 /.

Точное вычисление r_0 по известным таблицам $\varphi(y)$ и $\ell(y)$ для определенного исторического "среза" времени можно производить с помощью ЭВМ по методу проф. А.Я. Боярского /разбивка $\varphi(y)$ на мелкие классы, соответствующие внутреннее интегрирования/[2].

Вместе с тем как для целей понимания / одной из основных функций науки/, так и для целей активного воздействия на демографические процессы / при соответствующих условиях/ вычислительная техника при всех своих достоинствах уступает теоретическому анализу, позволяющему выделить небольшое число основных влияющих параметров.

В настоящее время функции плодовитости $\varphi(y)$ и смертности $\ell(y)$ обладают рядом характерных морфологических особенностей, учет которых желателен при оценках r_0. Так, $\varphi(y)$ – / в математическом плане близкая к плотности восстановления $h(y)$ [3], но в нестационарном потоке затухающего типа/ имеет основной резко выраженный максимум при $y = y_0$ / y_0 обычно близко к 25 годам/ и практически обращается в нуль при a = 15 лет и b = 50 лет.

Функция $\ell(y)$ в основном интервале плодовитости / 20–40 лет / имеет характерное "плато". Так, для условий УССР / 1959 г./ ℓ/20/ = 0,9497, а ℓ/40/ = 0,9216. Поэтому

1/ См. В.Ф. Шукайло. "К проблеме стохастической экстраполяции динамики численности населения". – В сб. "Демографические тетради", №№ 2-3, 1970.

2/ Курс демографии. М., "Статистика", 1967, стр. 244-247.

3/ Д.Кокс, В.Смит. Теория восстановления, М., "Советское радио", 1967.

основной вклад в интеграл /I/ вносится в некоторой окрестности точки y_0 экстремальной плодовитости, где функции $\ell(y)$ и $exp(-r_0 y)$ медленно меняются / при малых r_0 /, что и позволяет получить простые формулы для r_0 через малое число основных характеристик $\varphi(y)$ и $\ell(y)$, выбор которых в свою очередь требует обоснования.

Предлагаемый здесь подход к оценке r_0 отличается от подходов упомянутых венгерских авторов выбором опорных точек разложений в сочетании с контрольными точными неравенствами для основных параметров $\varphi(y)$ и $\ell(y)$ и темпа r_0.

Непосредственно из /I/ по теореме о среднем следует, что существует возраст T_* $(a < T_* < b)$, что

$$I = e^{-r_0 T_*}\int_a^b \varphi(y)\,\ell(y)\,dy = R_0 e^{-r_0 T_*} \qquad /I/$$

Здесь: R_0 - коэффициент нетто - воспроизводства. Отсюда сразу следует, что

$$r_0 = \frac{1}{T_*}\ln R_0 \qquad /2/$$

Введем нормированную плотность распределения

$$\bar{\bar{p}}(y) = \frac{1}{R_0}\varphi(y)\,\ell(y);\ (a \leq y \leq b) \qquad /3/$$

Пусть соответствующее математическое ожидание T_0 :

$$T_0 = \int_a^b y\,p(y)\,dy = \frac{R_1}{R_0}; \qquad /4/$$

$$R_1 = \int_a^b y\,\varphi(y)\,\ell(y)\,dy \qquad /5/$$

Функция $exp(-r_0 y)$ - выпуклая и всюду превышает собственную касательную в любой опорной точке $\bar{y}$, что дает оценку снизу для интеграла /I/. Наиболее удобно выбирать $\bar{y} = T_0$, что соответствует неравенству Иенсена для выпуклых функций. Итак,

$$\int_a^b \bar{\bar{p}}(y)\,e^{-r_0 y}\,dy > e^{-r_0 T_0}; \quad (r_0 \neq 0) \qquad /6/$$

или

$$\int_a^b \varphi(y)\ell(y)e^{-z_0 y}dy > R_0 e^{-z_0 T_0}; \quad (z_0 \neq 0) \qquad /7/$$

Так как $H(z_0)$ – монотонно убывающая функция, то из /7/ и /I/ следует общие неравенства для z_0 :

$$\begin{cases} 0 < \frac{1}{T_0}\ln R_0 < z_0 < \frac{1}{a}\ln R_0 & R_0 > 1 \\ z_0 = 0 & R_0 = 1 \\ \frac{1}{T_0}\ln R_0 < z_0 < \frac{1}{b}\ln R_0 < 0 & R_0 < 1 \end{cases} \qquad /8/$$

Таким образом, $T_* < T_0$ при $R_0 > 1$ и $T_* > T_0$ при $R_0 < 1$

Так как $exp(-zy)$ располагается ниже хорды, проходящей через точки $[a, exp(-za)]$ и $[b, exp(-zb)]$, то имеем с учетом /6/ следующее двухстороннее неравенство:

$$e^{-z_0 T_0} < e^{-z_0 T_*} < e^{-z_0 a} + (T_0 - a)\frac{e^{-z_0 b} - e^{-z_0 a}}{b-a}; \quad (z_0 \neq 0) \qquad /9/$$

Отсюда следует, что при $z_0 \longrightarrow 0$ $(R_0 \longrightarrow 1)$ характерный возраст $T_* \longrightarrow T_0$. Таким образом, для оценки темпа z_0 опорная точки $\bar{y} = T_0$ является наиболее естественной, особенно для процессов с колебаниями R_0 относительно 1.

Разложим $exp(-z_0 y)$ в ряд Тэйлора относительно $\bar{y} = T_0$:

$$e^{-z_0 y} = e^{-z_0 T_0}\left[1 - z_0(y - T_0) + \frac{z_0^2}{2!}(y - T_0)^2 - \frac{z_0^3}{3!}(y - T_0)^3 + \dots\right] \qquad /10/$$

Усредняя /10/ с плотностью распределения $\bar{\bar{p}}(y)$ /3/, имеем

$$\int_a^b \bar{\bar{p}}(y)e^{-z_0 y}dy = e^{-z_0 T_0}\left(1 + \frac{1}{2}z^2\sigma^2 - \frac{1}{6}z_0^3\sigma^3 A + \dots\right) \qquad /11/$$

Здесь σ – среднеквадратичное отклонение от математического ожидания T_0, A – коэффициент асимметрии плотности распределения $\bar{\bar{p}}(y)$ / как правило, $A > 0$ /. С учетом /II / уравнение для определения z_0 имеет вид

$$1 = R_0 e^{-z_0 T_0}\left(1 + \frac{1}{2!}z_0^2\sigma^2 - \frac{z_0^3}{3!}\sigma^3 A + \dots\right) \qquad /12/$$

Перенеся экспоненту в левую часть, разлагая ее в ряд относительно точки $z_0 T_0 = 0$ и вводя коэффициент вариации $\delta = \sigma / T_0$, имеем:

$$1 + z_0 T_0 + \frac{1}{2!}(z_0 T_0)^2 + \frac{1}{3!}(z_0 T_0)^3 + \cdots = R_0 \left[1 + \frac{1}{2!}(z_0 T_0)^2 \delta^2 - \frac{1}{3!}(z_0 T_0)^3 \delta^3 A + \cdots \right] \qquad /13/$$

Отсюда сразу следует:

Первое приближение для z_0:

$$z_0 = \frac{R_0 - 1}{T_0} \qquad /14/$$

Второе приближение для z_0:

$$z_0 = \frac{R_0 - 1}{T_0} K(R_0) \qquad /15/$$

$$K(R_0) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2(R_0 - 1)(1 - R_0 \delta^2)}} \qquad /16/$$

Из /16/ видно, что δ^2 играет роль "поправки к поправке" и, следовательно, нет нужды в ее кропотливом точном вычислении. Можно ограничиться треугольной апроксимацией плотности $\bar{\bar{p}}(y)$ в точках $(a,0)$, $[y_0, 2/(b-a)]$, $(b,0)$, вообще говоря, неплохой в качественном и количественном отношениях. Соответствующие вычисления дают:

$$\delta = \frac{\sigma}{T_0}$$

$$T_0 = \frac{1}{3}(a + y_0 + b) \qquad /17/$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{b-a} \Big\{ (y_0 - a)\left[\frac{1}{2}(a - T_0)^2 + \frac{2}{3}(a - T_0)(y_0 - a) + \frac{1}{4}(y_0 - a)^2\right] + (b - y_0)\left[\frac{1}{2}(b - T_0)^2 - \frac{2}{3}(b - T_0)(b - y_0) + \frac{1}{4}(b - y_0)^2\right] \Big\}$$

Принимая $a = 15$, $y_0 = 25$, $b = 50$, имеем $T_0 = 30$, $\delta = 0{,}245$, $\delta^2 = 0{,}060$.

В таблице I сведены рассчитанные по формуле /I6/ при $\sigma^2 = 0{,}060$ значения функции $K(R_0)$.

Таблица I

R_0	K
0,90	I,053
0,92	I,04I
0,94	I,030
0,96	I,0I9
0,98	I,0I0
I,00	I,000
I,02	0,999
I,04	0,982
I,06	0,973
I,08	0,965
I,I0	0,958

При изменении коэффициента нетто-воспроизводства R_0 от 0,9 до I,I $K(R_0)$ изменяется всего лишь от I,053 до 0,958, что свидетельствует о высокой точности уже первого приближения /I4/. Формулу /I5/ можно рекомендовать для целей анализа эволюции z_0 по годам. При этом малые абсолютные различия в z_0 могут оказаться тонким индикатором глубинных демографических процессов.

Дальнейшие вычислительные упрощения связаны с анализом связи коэффициентов нетто-воспроизводства R_1 , R_0 и брутто-воспроизводства I_1 , I_0 . Учитывая существование "плато" кривой смертности $\ell(y)$ в основном интервале /20,40/ и достаточно резко выраженный максимум $\varphi(y)$ при $y = y_0$ /вблизи 25 лет /, можно освободить расчет R_0 от учета показателей выживаемости по всем возрастным классам плодовитости $\varphi(y)$.

Разложим $l(y)$ в ряд Тэйлора относительно точки экстремальной плодовитости, ограничившись только двумя членами:

$$l(y) = l(y_0)\left[1 - \lambda_0(y - y_0)\right] \qquad /18/$$

Здесь $\lambda_0 = l'(y_0)/l(y_0)$ – "сила смерти" в возрасте y_0.
С учетом /18/ имеем:

$$R_0 = \int_a^b \varphi(y)\, l(y)\, dy = l(y_0)\, I_0\left[1 - \lambda_0(T - y_0)\right] \qquad /19/$$

Здесь,

$$I_0 = \int_a^b \varphi(y)\, dy \qquad /20/$$

$$I_1 = \int_a^b y\, \varphi(y)\, dy \qquad /21/$$

$$T = \frac{I_1}{I_0} \qquad /22/$$

T – длина поколения или средний возраст матерей, родивших в некотором историческом "срезе" времени $(t, t+dt)$. Строго говоря, длину поколения следовало бы определить как средний возраст матерей, родивших живых девочек-первенцев. Соответственно формулы /20,21/ корректируются умножением $\varphi(y)$ на коэффициент $\xi(y) \leqslant 1$. Повидимому, при этом поправка к /22/ невелика, особенно при преобладающей "установке" на 1-3 детей. Вопрос о длине поколения весьма интересен, допускает различные подходы и заслуживает специального рассмотрения.

Установим теперь общее контрольное неравенство между величинами T_0 и T.

$$T_0 - T = \frac{R_1}{R_0} - \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{R_0 I_0}\left(R_1 I_0 - I_1 R_0\right);$$

$$R_1 I_0 - I_1 R_0 = \left[\int_a^b y\, \varphi(y)\, l(y)\, dy\right]\left[\int_a^b \varphi(y)\, dy\right] -$$

$$- \left[\int_a^b y\, \varphi(y)\, dy\right]\left[\int_a^b \varphi(y)\, l(y)\, dy\right] =$$

$$= \int_a^b\int_a^b \varphi(y)\varphi(\bar{\bar{x}})\left[l(y) - l(\bar{\bar{x}})\right] y\, d\bar{\bar{x}}\, dy < 0 \qquad /23/$$

Функция двух переменных $\bar{\bar{x}}$ и y – $\varphi(y)\varphi(\bar{\bar{x}})[l(y) - l(\bar{\bar{x}})]$ определенная в квадрате, обратно симметрична относительно диагонали этого квадрата, обращаясь в нуль на этой диагонали $y = \bar{\bar{x}}$. Если взять два элемента площадью $d\bar{\bar{x}}dy$, равноудаленных от диагонали квадрата, то элементу с большим значением y соответствует отрицательное значение функции $\varphi(y)\varphi(\bar{\bar{x}})[l(y) - l(\bar{\bar{x}})$ в силу $l(y) < l(\bar{\bar{x}})$ при $y > \bar{\bar{x}}$. Поэтому выражение в /23/ отрицательно и, следовательно, всегда

$$\frac{R_1}{R_0} < \frac{I_1}{I_0}, \quad T_0 < T; \qquad /24/$$

Заметим, что при монотонно убывающем с возрастом корректирующем множителе $\xi(y)$ по аналогичным соображениям точная длина поколения несколько меньше T.

Найдем теперь соотношение, связывающее T_0 и T. Раскладывая функцию $y\,\varphi(y)$ в ряд Тэйлора в окрестности y_0 и удерживая первые два члена, имеем:

$$y\, l(y) = l(y_0)\left[y_0 + (1 - \lambda_0 y_0)(y - y_0)\right] \qquad /25/$$

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\int_a^b \varphi(y)\, y\, l(y)\, dy}{\int_a^b \varphi(y)\, l(y)\, dy} = \frac{\int_a^b \varphi(y)[y_0 + (1 - \lambda_0 y_0)(y - y_0)]\, dy}{\int_a^b \varphi(y)[1 - \lambda_0 (y - y_0)]\, dy} =$$

$$= \frac{y_0 I_0 + (1 - \lambda_0 y_0)(I_1 - y_0 I_0)}{I_0 - \lambda_0 (I_1 - y_0 I_0)} = \frac{I_1}{I_0}\eta \qquad /26/$$

Итак:

$$T_0 = T\eta, \qquad \eta = \frac{1-\lambda_0\frac{y_0}{T}(T-y_0)}{1+\lambda_0(T-y_0)}\,; \qquad /27/$$

Формула /27/ удовлетворяет общему неравенству / 24/.

Оценим корректирующий множитель в /27/ , используя таблицы смертности УССР[1/]. Для 1958-1959 годов, принимая $y_0 = 25$, находим $\ell'/25/ = 0{,}1[\ell/30/ - \ell/20/] = 0{,}1/0{,}938-0{,}950/ = -0{,}012$. $\lambda_0 = \lambda/25/ = -\ell'/25// \ell/25/ = 0{,}012/0{,}944 = 1{,}27.10^{-3}$ 1/год. Для 1966-1967 годов соответственно $\ell'/25/ = 0{,}1/0{,}964 - 0{,}972/ \approx -0{,}008$.

$\lambda_0 = 0{,}008/0{,}968 = 0{,}825.10^{-3}$. 1/год.

С учетом этих значений λ_0 при $y_0 = 25$ и $T = 30$, имеем в первом случае $\eta = 0{,}988$, во втором $\eta = 0{,}992$. Очевидно, что для большинства практических расчетов можно просто принимать $\eta = 0{,}990$ и, следовательно, свести расчет T_0 к расчету более простой величины - длины поколения T. Соответственно и расчет коэффициента нетто-воспроизводства R_0 /19/ для этих условий можно свести к простой формуле: $R_0 = 0{,}995\,\ell(y_0)I_0$. В качестве практического примера выполним расчет темпов одногодичных "стабильных населений" для условий рождаемости и смертности УССР в 1959-1967 гг.

Предлагаемая методика определяется следующей сводкой расчетных формул:

$$\begin{cases} r_0 = \dfrac{R_0-1}{T_0}K(R_0) \\ R_0 = 0{,}995\,\ell(y_0)I_0 \\ T_0 = 0{,}990\,T \\ T = \dfrac{I_1}{I_0} \end{cases}$$

1/ Таблицы рассчитаны в Отделе проблем демографического развития УССР Института экономики АН УССРпод руководством В.С. Стешенко.

$$I_0 = 0{,}49.5.\sum_{i=1}^{i=7} q_i$$

$$I_1 = 0{,}49.5\sum_{i=1}^{i=7} q_i\left[a + \left(i - \tfrac{1}{2}\right)\Delta\right]$$

Здесь Δ = 5 лет, интервал /I5-49 лет/ разбит на 7 классов длиной Δ, q_i - количество детей, рожденных женщиной из i-го возрастного класса за один год. Так как $q_1 \ll q_2$, $q_3 < q_2$, но q_3 и q_2 одного порядка $[q_3/q_2 = 0{,}7 \div 0{,}9]$, то y_0 близко к центру тяжести классов 2 и 3, который лишь на несколько десятых меньше 25/24,7÷24,9/.

В таблице 2 сведены рассчитанные по предлагаемой методике r_0 для одногодичных стабильных населений / УССР, 1959--1967 гг./, графически эволюция по годам представлена на рис. I.

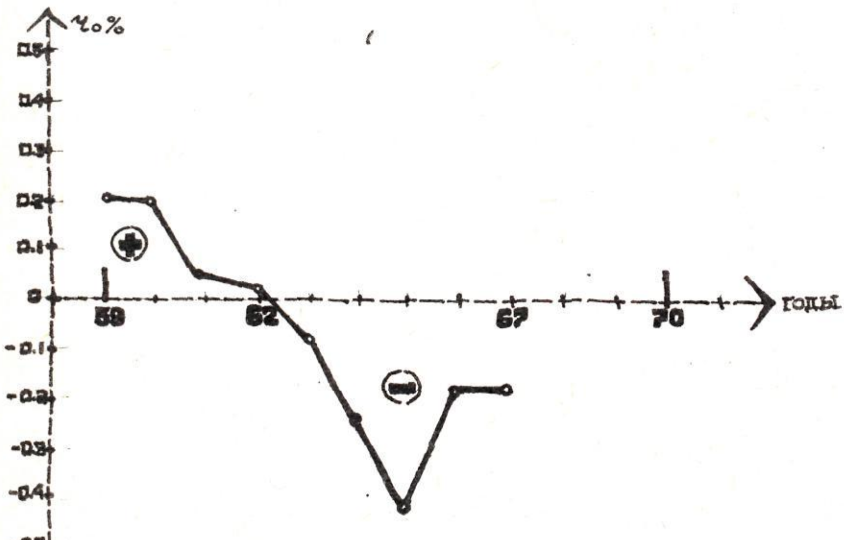

РИС.1. ЭВОЛЮЦИЯ ТЕМПОВ r_0 ВОСПРОИЗВОДСТВА ОДНОГОДИЧНЫХ СТАБИЛЬНЫХ НАСЕЛЕНИЙ В УССР < 1959-1967 >

Таблица 2

Эволюция темпов r_0 воспроизводства одногодичных стабильных населений в УССР /1959–1967 гг./

Год	I_0	I_1	T	T_0	$l(y_0)$	R_0	$K(R_0)$	r_0 (%)
1959	1,125	30,80	27,40	27,1	0,944	1,056	0,975	+0,201
1960	1,115	30,6	27,4	27,1	0,949	1,053	0,976	+0,191
1961	1,072	29,2	27,2	26,9	0,953	1,016	0,993	+0,059
1962	1,059	28,9	27,3	27,0	0,957	1,008	0,996	+0,029
1963	1,032	28,2	27,3	27,0	0,960	0,985	1,008	-0,056
1964	0,980	26,7	27,2	26,9	0,963	0,939	1,030	-0,234
1965	0,940	25,6	27,2	26,9	0,965	0,902	1,052	-0,412
1966	0,990	26,9	27,2	26,9	0,967	0,952	1,024	-0,183
1967	0,985	26,7	27,1	26,8	0,969	0,950	1,024	-0,191

Обращает внимание как резкое относительное различие r_0 по годам, так и удивительная стабильность длины поколения T /колебания T всего $\pm 0{,}5\%$ /. Колебание r_0 имеет существенное смещение в отрицательную область /среднее из отрицательных темпов примерно в два раза больше по модулю среднего из положительных темпов/. Несомненно, для целей прогнозирования умеренная стохастическая модель r_0 /стационарный или нестационарный процесс с медленной тенденцией/ предпочтительнее детерминированных моделей r_0, хотя бы из-за возможности получения естественных и структурно содержательных "вилок" прогноза.

Естественно, для развития стохастических методов прогноза требуется накопление и систематизация фактов настоящего и прошлого о циклических колебаниях демографических параметров, в частности, r_0. Природа колебаний в социальной статистике, повидимому, не является "чисто" случайной, резко выраженные "зигзаги", присущие миллионным коллективам, имеют достаточные внутренние основания. Это отнюдь не мешает для ряда практических целей использовать различные внешние описания в виде математических типов случайных процессов. Наблюдаемая, например, на Украине / рис. I/ картина эволюции r_0 может быть истолкована как числовая мера реальных коллективных процессов адаптации к меняющимся условиям существования. И в таком смысле эта картина естественна. Несомненно, Жан-Жак Руссо назвал бы такой "стесненный" режим воспроизводства неестественным, мерой неблагополучия и был бы сейчас прав, если не полностью, то частично. Представляется естественным, что любой самый широкий социально-биологический критерий "оптимальности" демографического процесса не должен допускать длительное /порядка T лет / отрицательное смещение r_0. Кратковременные же колебания / в среднем 5-10 лет / относительно нуля следует рассматривать как естественные, по крайней мере, для модели квазистационарного населения, которая хотя допускает процессы медленного неограниченного роста численности популяции, представляется более разумной, чем модель неограниченного роста с постоянным темпом /"геометрическая прогрессия"Мальтуса/.

Гомеостатические процессы регулирования в государстве как целостном социальном организме исключительно разнообразны и направлены на поддержание самых различных состояний. В частности, на определенных исторических периодах соответствующие обратные связи принимают форму активной демографической политики, весьма разнообразной по своему содержанию и проблематике. В целом все мероприятия демографической политики вписываются в общую, хорошо известную в биологии, схему: "доза-эффект". "Доза" - это совокупность определенных материальных и психологических стимулов. "Эффект" - совокупность определенных устойчивых изменений количественных и качественных показателей воспроизводства населения. Основная трудность, как это давно уже отмечается, - в построении целевой функции демоэкономического развития с учетом внутренних и внешних ограничений существования государства[1/]. Такая целевая функция должна охватывать широкий круг факторов и не сводить дело к отдельным проблемам трудовых ресурсов или национального дохода. Повидимому, сюда следует включать как демоэкономические, так и устойчивые показатели социальной психологии, национального характера[2/]. Во всяком случае для выработки стратегии и тактики демографической политики требуется также исторический анализ эволюции демографических показателей, их вероятностное внешнее описание и об"яснение моделями внутренних механизмов как математическими, так и вербальными.

В.Ф. Шукайло.

I/ А.Я.Боярский. К проблеме демографического оптимума. - В сб. "Изучение воспроизводства населения", М., "Наука", I968; В.П. Пискунов. О некоторых теоретических вопросах демографической политики. - В сб. "Демографические тетради",№ 2-3, I970.

2/ В.Ф. Шукайло. К теории прогнозирования демоэкономических движений. Ж. "Экономика и математические методы", № 3, I970.