МОДЕЛИ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

*

Сборник статей

Д
И
ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЦСУ СССР
Лаборатория демографии

МОДЕЛИ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

*

Под редакцией А. Я. БОЯРСКОГО

«СТАТИСТИКА» МОСКВА 1972

ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Эта брошюра является вторым сборником серии. В статьях рассматриваются теоретические демографические модели, позволяющие исследовать закономерности изменения численности и структуры населения, взаимосвязи между ними, а также влияние демографических процессов на экономику.

Вышли из печати: «Факторы рождаемости»

Готовятся к изданию в 1972—1973 гг.:

В. А. Белова, Л. Е. Дарский. Статистика мнений в изучении рождаемости.
«Что такое демография»
«Словарь демографических терминов»

Предварительные заказы на брошюры можно оформить в местных книжных магазинах или в магазинах «Книга — почтой».

СОДЕРЖАНИЕ

1—8—3
24—72

МОДЕЛИ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

Редактор *Г. И. Чертова*
Техн. редактор Т. Д. Алексеев. Корректор В. А. Жудов
Худ. редактор **Т. В. Стихно**. Обложка художника Л. С. Эрмана

Сдано в набор 24 /III 1972 г. Подписано к печати 9/X 1972 г. Формат бумаги 84×108 1/32. Бумага № 1 Объем 4,0 печ. л. Уч.-изд. л 6,82. Тираж 3200 экз. А09932 (Тематич. план 1972 г. № 24).

Издательство «**Статистика**», Москва, ул. Кирова, 39.

Заказ № 2893 Ивановская областная типография управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, г. Иваново-8, Типографская, 6.
Цена 43 коп.

ОТ РЕДАКТОРА

Ведущиеся в нашей стране демографические исследования являются неотъемлемой частью «комплексных исследований современных процессов развития общества для научного руководства социалистическим хозяйством и решения задач коммунистического строительства»[1], проведение которых осуществляется в соответствии с Директивами XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—1975 гг.

В этих исследованиях важное место принадлежит математическому моделированию демографических процессов, которое позволяет значительно углубить анализ, лучше понять внутренние закономерности демографического развития. Описание, оперирующее только качественными категориями, и логический анализ без применения математики играют большую роль в истории науки, но на определенном этапе их возможности исчерпываются и получение новых результатов становится невозможным без привлечения математического аппарата. Отсюда широкий интерес к математическим методам исследования в самых различных отраслях знания. Не составляет исключения и демография, которая вступила на путь использования математики даже раньше, чем большинство общественных наук.

В предлагаемом читателю сборнике рассматривается ряд теоретических вопросов, связанных с построением отдельных математико-демографических моделей, их истолкованием и применением. Некоторые из статей сборника имеют непосредственно прикладное значение, другие являются сугубо теоретическими, но не в том смысле, что содержащиеся в них выводы не имеют практического значения, а в том смысле, что они не могут быть использованы для практических целей непосредственно.

К статьям первого типа относятся статьи А. Я. Боярского и К. Ю. Шабурова. Широко используемая в демо-

[1] «Материалы XXIV съезда КПСС». М., Политиздат, 1971, с. 245.

графии модель стабильного населения позволяет для каждого населения, характеризующегося заданным порядком вымирания, определить возрастно-половую структуру, коэффициенты прироста, рождаемости и смертности, соответствующие различным функциям повозрастной плодовитости. В известном смысле аналогичной является задача определения профессиональной или другой подобной структуры стабильного населения при заданной вероятности перехода из одной профессиональной или какой-либо иной группы в другую через определенный интервал времени. В первой из упомянутых статей рассматриваются имеющие обратный смысл задачи нахождения показателей повозрастной плодовитости, приводящих к заданному коэффициенту прироста, и переходных вероятностей, обеспечивающих заданную численность и структуру лиц рассматриваемой группы. Методы решения этих задач могут быть использованы на практике, например при планировании подготовки кадров.

Непосредственно практическое значение имеют также вопросы, рассматриваемые в статье К. Ю. Шабурова «Таблицы дожития и причины смерти». Статья посвящена использованию таблиц дожития (таблиц смертности) для анализа структуры смертности по причинам и выявления влияния отдельных причин смерти на демометрические функции таблиц. Эта проблема имеет давнюю историю, которая кратко изложена в работе. Статья К. Ю. Шабурова является первым в нашей литературе систематическим изложением вопроса, содержит описание методов конструирования обычных таблиц смертности по причинам и так называемых гипотетических таблиц, строящихся при условии устранения той или иной причины, и, надо полагать, будет с интересом встречена всеми, кто занимается изучением уровня и динамики смертности и их измерением.

Работа Е. М. Андреева «О связи реального и гипотетического поколений» относится к статьям более теоретического плана. Понятия гипотетического (условного, фиктивного) и реального поколений занимают очень важное место в современном демографическом анализе, но различия между тем и другим осознавались лишь постепенно, в значительной степени интуитивно и никогда не подвергались всестороннему строгому исследованию. Е. М. Андреев в своей статье обращает внимание на то существенное обстоятельство, что на базе различных исходных демометрических функций, построенных на базе повозрастных показателей, наблюдающихся в одном и том же конкретном населении в данный момент, можно сконструировать не одно, а несколько различных гипотетических поколений, анализирует соотношения между этими гипотетическими поколениями, обосновывает выбор функции $\mu(x)$ (силы смертности) в качестве исходной для построения гипотетического поколения.

В статье А. Г. Вишневского «Население и производство» рассматривается не чисто демографическая, а демоэкономическая модель. С ее помощью автор исследует влияние, которое оказывают демографические факторы (численность и темпы роста населения, его демографическая структура), рассматриваемые в качестве независимых переменных, на развитие производства. Численность работников, их профессиональная и квалификационная структура и ряд других характеристик, отражающихся в конечном счете на производительности труда, зависят от множества факторов, в том числе и от демографических. Как можно более полное знание места, занимаемого демографическими явлениями среди всех социальных явлений, воздействующих на производство, важно для ответа на актуальный вопрос об экономическом значении как слишком быстрого, так и слишком медленного роста населения, наблюдающегося в различных районах земного шара и нашей страны, а также для нахождения наилучшего с экономической точки зрения режима воспроизводства населения. Эта проблема освещена в нашей литературе относительно слабо. А. Г. Вишневский пытается подойти к ее анализу, конструируя модель, объединяющую демографический анализ с использованием модели стабильного населения и экономический анализ с использованием производственной функции Кобба-Дугласа. Несмотря на ряд спорных положений и подходов, неизбежных, когда речь идет о малоизученном вопросе, эта статья может заинтересовать тех, кто изучает взаимодействие населения и экономики.

А. Я. Боярский.

А. Я. БОЯРСКИЙ

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Как известно, если в течение достаточно долгого времени сохраняется неизменный режим воспроизводства населения, такое население превращается в стабильное. Для стабильного населения, характеризующегося данным порядком вымирания, можно определить возрастно-половую структуру, коэффициенты прироста, рождаемости и смертности, соответствующие различным показателям возрастной плодовитости.

Если рассматривать эту задачу в качестве прямой, то обратная задача может состоять в том, чтобы при данном порядке вымирания определить показатели повозрастной плодовитости, приводящие к заданному коэффициенту прироста или к заданным структурным показателям. Сразу нужно оговориться, что задача не имеет однозначного решения: при стабильной возрастной структуре населения всегда можно повышением плодовитости в одном возрасте компенсировать ее понижение в другом.

Будем в дальнейшем пользоваться показателями, приспособленными к продвижению в анализе на определенный шаг времени, скажем на год. Если с ним совпадает интервал возрастной группировки, то нет затруднений, связанных с определением доли переходящих в следующую возрастную группу: через год все становятся на год старше. Кроме того, чтобы избежать громоздкости изложения, будем рассматривать только один пол, соответственно трактуя и числа рождений.

Введем p_x — вероятности дожития до конца предстоящего года для лиц возраста x лет (т. е. находящихся в интервале x, $x+1$). Для них же введем Φ_x — числа рождений на одного из них в предстоящем году, уменьшенные в соответствии с размерами детской смертности до конца года рождения. Для простоты пусть $p_\omega=0$.

Число детей, которые родятся в предстоящем году в расчете на одно лицо, родившееся x лет назад, и доживут до конца года рождения, рассчитаем по формуле

$$r_x=p_0\,p_1\cdots p_{x-1}\,\Phi_x\ .$$

Так как в стабильном населении ежегодные числа рождений изменяются в одном и том же отношении h, общее число родившихся в предстоящем году, уменьшенное на число умерших до конца этого года, составит

$$N=Nh^{-1}r_0+Nh^{-2}r_1+\ldots+Nh^{-(\omega+1)}r_\omega\ .$$

Сокращая на N, получаем

$$r_0h^{-1}+r_1h^{-2}+\cdots+r_\omega\,h^{-(\omega+1)}=1. \qquad (1)$$

Это равенство заменяет здесь известное соотношение теории стабильного населения

$$\int\limits_0^\infty l(x)\,f(x)\,e^{-hx}\,dx=1$$

с учетом несколько иного смысла использованных параметров (что связано с разбивкой непрерывной абсциссы возраста на годовые интервалы).

Уравнение (1) позволяет определить различные наборы r_x, а следовательно и Φ_x, обеспечивающие заданный темп роста h. В частности, можно найти показатели, обеспечивающие необходимый темп h при заданной конфигурации кривой плодовитости. Для этого достаточно задать некоторые показатели повозрастной плодовитости, отражающие вероятную или желательную конфигурацию ее кривой, вычислить левую часть выражения (1), а затем все показатели плодовитости пропорционально изменить так, чтобы получилась 1. Но однозначного решения рассматриваемая задача, как уже отмечалось, не имеет.

В применении к классической теории стабильного населения, в которой рассматривается только возрастно-половая структура, рассмотренная задача вряд ли имеет большое практическое значение: можно надеяться на определение оптимального с точки зрения какого-нибудь критерия темпа роста населения, но вряд ли можно рассчитывать на достижение точных результатов в отношении желательной плодовитости, да и оптимальный темп практически может быть определен весьма приблизительно.

Но в обобщенной теории стабильного населения[1] на сцену выступают вероятности перехода из одной группы населения в другую, которые поддаются регулированию гораздо легче и знание нужных значений которых особенно важно в плановом хозяйстве. Если, например, выделяют профессиональную группу, то этими вероятностями определяют квоты подготовки к этой профессии молодежи; если выделяют город — село, то определяют размеры нужной миграции, и т. д.

Выделим из населения некоторую группу с повозрастными численностями s_x. Введем следующие условия: никто не родится в составе этой группы, т. е. $s_0=0$ (как в профессиональных группах, группах по образованию и т. п.); 2) относительное число лиц этой группы во всем населении не влияет на режим воспроизводства населения, что может объясняться либо ее малочисленностью, либо совпадением ее плодовитости и смертности с соответствующими характеристиками остального населения, либо, наконец, уже достигнутой стабильностью ее относительной численности в каждом возрасте. Оба условия вполне приемлемы, например, для не очень многочисленной профессиональной группы, такой, как врачи, даже учителя и т. п.

Процесс стабилизации всего населения может состоять в установлении не только стабильной возрастно-половой структуры, но и стабильных долей лиц, принадлежащих к данной группе в каждом возрасте. После завершения этого процесса численность группы через год составит

$$s'_x = hs_x \ . \tag{2}$$

Введем переходные вероятности. Пусть вероятность через год остаться в живых и оказаться в данной выделяемой группе для лица, принадлежащего к этой группе, равна V_x, а для лица из остального населения — U_x.

[1] См. «Курс демографии». Под ред. А. Я. Боярского. М., «Статистика», 1967, с. 247.

Тогда повозрастные численности лиц этой группы через год будут

$$s'_x = (S_{x-1} - s_{x-1})\,U_{x-1} + s_{x-1}\,V_{x-1} =$$

$$= S_{x-1}\,U_{x-1} + s_{x-1}(V_{x-1} - U_{x-1}) \ , \tag{3}$$

где S_x — общая численность лиц возраста x.

На основании выражений (2) и (3) можно записать:

$$S_{x-1}\,U_{x-1} + s_{x-1}(V_{x-1} - U_{x-1}) = hs_x \ . \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$\frac{s_x}{S_0} = \alpha_x \ , \tag{5}$$

причем в стабильном населении, как известно,

$$\alpha_x = p_0\,p_1 \cdots p_{x-1}\,h^{-x} , \tag{6}$$

и

$$\frac{s_x}{S_x} = \beta_x \ . \tag{7}$$

Тогда, заменяя в выражении (4) $S_{x-1} = \alpha_{x-1}S_0$ и $s_x = \beta_x S_x = \alpha_x\beta_x S_0$ и сократив на S_0, получаем

$$\alpha_{x-1}\,U_{x-1} + \alpha_{x-1}\,\beta_{x-1}(V_{x-1} - U_{x-1}) =$$

$$= h\alpha_x\,\beta_x \ , \tag{8}$$

причем для $x=1$ надо иметь в виду, что $\alpha_0=1$ и $\beta_0=0$ (и, кроме того, $U_\omega = V_\omega = 0$).

На этом основании можно, зная переходные вероятности U_x и V_x, определить β_x, т. е. доли выделенного субнаселения в каждой возрастной группе (прямая задача).

Действительно, введя

$$a_x = \frac{\alpha_x\,U_x}{h} , \tag{9}$$

$$b_x = \frac{V_x - U_x}{h} \tag{10}$$

$$\gamma_x = \alpha_x\,\beta_x , \tag{11}$$

имеем рекуррентную формулу

$$\gamma_x = a_{x-1} + b_{x-1}\,\gamma_{x-1} \ . \tag{12}$$

Зная γ_x, можно делением их на α_x найти β_x.

Таким образом, чтобы найти интересующие нас β_x, достаточно знать вероятности дожития $p_0, p_1, \ldots p_\omega$, коэффициент роста населения h, а также переходные вероятности U_x и V_x.

Покажем определение β_x на примере. Для краткости примера пусть $\omega=3$ (но это может быть не 3 года, а, скажем, 3 десятилетия). Пусть вероятности дожития и переходные вероятности будут такими, как в табл. 1 (V_2 может быть так мало, например, вследствие ухода многих на пенсию; вероятности U_x могут означать, скажем, что подготовка к данной профессии ведется так, что она охватывает 20% возрастной группы 0 и по 10% группы 1 и группы 2; с учетом дожития получаем приведенные в таблице величины. Например, $U_0=0{,}2\times0{,}8=0{,}16$). Коэффициент роста $h=1{,}25$.

Теперь можно приступать к вычислениям. α_x получаем по формуле (6), a_x и b_x — по формулам (9) и (10). Затем пользуясь рекуррентной формулой (12), последовательно находим γ_x ($\gamma_0=0$, так как $\beta_0=0$). Наконец, делением γ_x на α_x находим β_x.

Итоги расчета сведены в табл. 1.

Таблица 1

x	p_x	U_x	V_x	α_x	a_x	b_x	γ_x	β_x
0	0,8	0,16		1	0,128	0	0	0
1	0,5	0,05	0,4	0,64	0,0256	0,28	0,128	0,20
2	0,25	0,025	0,1	0,256	0,00512	0,06	0,0614	0,24
3	0	0	0	0,0512	0		0,0088	0,172

Полученные результаты означают, что после стабилизации в интересующей нас группе окажется одна пятая населения возраста 1, около четверти населения возраста 2, несколько больше одной шестой населения возраста 3.

Теперь рассмотрим задачу, обратную предыдущей. Пусть задана потребность в лицах данной группы (например, в кадрах данной профессии). Она может быть задана либо прямо числами β_x (доли лиц данной профессии в каждой возрастной группе), либо менее жестко, в виде общей численности лиц данной группы Σs_x, которую можно тут же распределить по возрасту тем или иным способом (как выше распределялась плодовитость), в конечном счете перейдя к тем же числам β_x, необходимым для решения обратной задачи.

Допустим, например, что потребность в лицах данной группы задана как процент от численности населения в определенных возрастах (скажем, потребность в учителях задана как процент от численности населения в школьных возрастах). Пусть известно, что в данной профессии должно быть занято 10% численности возрастов 0 и 1. Тогда

$$\sum_{1}^{\omega} s_x=0{,}1\,(S_0+S_1),$$

а в единицах S_0 с учетом формул (5), (7) и (11)

$$\sum_{1}^{\omega} \gamma_x=0{,}1\,(\alpha_0+\alpha_1)\ .$$

В нашем случае $\Sigma\gamma_x=0{,}1\cdot(1+0{,}64)=0{,}164$, или для круглого счета 16%. Значения γ_x и зависящие от них интересующие нас β_x определяются тем, как будут распределены эти 16% между всеми возрастными группами, в данном случае между группами 1, 2 и 3. В реальной действительности это распределение складывается под влиянием различных социально-экономических и других факторов, но нас здесь интересует только математическая сторона вопроса; поэтому мы рассмотрим 4 произвольных варианта распределения γ_x между возрастными группами 1, 2 и 3:

1) 4, 4, 8;
2) 4, 8, 4;
3) 8, 4, 4;
4) 2, 13, 1.

Эти числа, сумма которых во всех случаях равна 16, можем принять за γ_x (в процентах). Делением их на α_x найдем соответствующие β_x.

После того как потребность в лицах данной группы задана в виде набора чисел β_x, обратная задача заключается в том, чтобы, зная вероятности выбытия из состава данной группы (или, что то же, вероятности остаться в ее составе V_x), определить, какими должны быть вероятности ее пополнения U_x, обеспечивающие достижение заданных величин β_x. Эта задача решается несложным преобразованием выражения (8) (напомним, что $\alpha_x=\alpha_{x-1}p_{x-1}h^{-1}$), дающим формулу

$$U_x=\frac{p_x\,\beta_{x+1}-\beta_x\,V_x}{1-\beta_x}\ . \qquad (13)$$

В табл. 2 приведены значения вычисленных по этой формуле U_x для четырех вариантов распределения $\Sigma\gamma_x$ между тремя возрастными группами.

Таблица 2

x	p_x	α_x	V_x	Первый вариант				Второй вариант				Третий вариант				Четвертый вариант			
				γ_x	β_x	U_x	W_x	γ_x	β_x	U_x	W_x	γ_x	β_x	U_x	W_x	γ_x	β_x	U_x	W_x
0	0,8	1	—	—	—	0,05	0,062	—	—	0,05	0,062	—	—	0,1	0,125	—	—	0,25	0,31
1	0,5	0,64	0,4	0,4	0,0625	0,0566	0,113	0,04	0,0625	0,140	0,280	0,08	0,1250	0,0321	0,0642	0,02	0,0312	0,2423	0,4986
2	0,25	0,256	0,1	0,04	0,1562	0,4444	1,777	0,08	0,3125	0,2386	0,9545	0,04	0,1562	0,2129	0,8516	0,13	0,508	—0,0042	
3	0	0,0512	0	0,08	1,5625			0,04	0,7812			0,04	0,7812			0,01	0,195		

Найденные переходные вероятности позволяют определить охват подготовкой к данной профессии в тех группах населения, из которых поступает пополнение. Если бы в этих группах не было смертности, то доля охваченных подготовкой по отношению ко всей численности группы на начало возрастного интервала была бы равна переходной вероятности U_x. Чтобы учесть фактически существующую смертность, надо разделить U_x на вероятность дожития до конца интервала p_x, в результате чего и получим требующуюся долю охвата соответствующей подготовкой:

$$W_x = U_x : p_x \,.$$

Числа W_x также приведены в табл. 2.

Анализ содержащихся в табл. 2 результатов расчета показывает, что не все предусмотренные нами варианты могут быть реализованы. В первом варианте $\beta_3 > 1$ и

$W_2 > 1$. Это означает, что намечено такое участие в данной группе возраста 3, которое превышает его воможности: до этого возраста доживает меньше людей, чем требуется для участия в данной группе. В последнем варианте $U_2 < 0$ указывает, что большое число лиц данной профессии, образованное по нашему заданию в возрасте 2, через год переполнит возраст 3 и это поставит задачу выведения из рассматриваемой группы излишка в количестве большем, чем это обусловлено значением U_2.

Изложенное не охватывает исследования обмена между двумя (и более) частями населения со своим режимом воспроизводства в каждой (например, город — село и т. п.). Это особая задача, которую мы здесь не рассматриваем. Однако надо думать, что изложенные выше подходы могут быть применены в некоторых расчетах, прежде всего в расчетах подготовки кадров тех или иных профессий. Разумеется, практические вычисления будут намного более громоздкими, чем в нашем простом примере. Это затруднение вполне преодолимо с помощью современной вычислительной техники.

Важнее, что население в действительности не является стабильным. Поэтому найденные описанным путем результаты можно считать только общим ориентиром, который нуждается в дальнейших коррективах. Эти коррективы могут быть связаны, с одной стороны, с волнообразным изменением потребностей в услугах данной группы. Например, в начальных классах в первые послевоенные годы был вакуум, а в середине пятидесятых годов через них проходили контингенты повышенной рождаемости компенсационного периода. С другой стороны, при установлении неизменной квоты подготовки по возрастам численность самой группы будет претерпевать аналогичные колебания. Однако приспосабливаться к таким колебаниям нет необходимости. За исключением особенно длительных волн с большой амплитудой, такие колебания могут погашаться соответственными изменениями нагрузки лиц рассматриваемой группы или даже уровня обслуживаемой ею потребности.

Е. М. АНДРЕЕВ

О СВЯЗИ РЕАЛЬНОГО И ГИПОТЕТИЧЕСКОГО ПОКОЛЕНИЙ

Данная статья посвящена изучению взаимосвязи реальных демографических процессов и их отражения системой демографических показателей. Изучение этой взаимосвязи мы проведем на примере процесса смертности, однако сделанные выводы могут быть распространены и на иные демографические процессы.

Основное внимание уделено проблеме связи реального и гипотетического поколений, а также анализу возможных точек зрения на определение гипотетического поколения. Целью статьи является количественное измерение отличий показателей таблиц для реальных и гипотетических поколений, которые весьма существенны в условиях быстро меняющейся демографической ситуации. Следует отметить, что связи и различия, количественному анализу которых посвящена статья, на качественном уровне неоднократно рассматривались в демографической литературе.

1. Исходная математическая модель населения

Мы будем исходить из непрерывной модели популяции. Рассмотрим вначале функцию $l(x, t)$, равную вероятности дожития до точного возраста x для лица, родившегося в момент времени t. Функция $l(x, t)$ определена при $x \geqslant 0$ и при всех t, т. е. на верхней половине координатной плоскости (t, x), именуемой демографической сеткой или плоскостью демографических событий. Рассмотрим также функцию $\rho(t)$ — плотность рождений. Функция $\rho(t)$ определяется следующим образом. Обозначим через $N(t_1, t_2)$ число рождений на отрез-

ке времени $[t_1, t_2]$. Плотностью рождений называется такая функция $\rho(t)$, что для любых $t_1 \leqslant t_2$

$$N(t_1 t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)\, dt \quad . \tag{1}$$

Основным допущением непрерывной модели является предположение, что функция $\rho(t)$ непрерывна, а функция $l(x, t)$ непрерывно дифференцируема, т. е. имеет непрерывные производные по x и по t.

Оба эти допущения, естественно, могут не выполняться в реальной популяции; более того, функция $\rho(t)$ заведомо не непрерывна. Это, естественно, снижает ценность непрерывной модели и ставит под сомнение адекватность выводов, сделанных на базе этой модели, реальной ситуации. Обширная практика демографических расчетов доказывает беспочвенность таких сомнений, однако в интересах формальной строгости и логической завершенности полезно специально рассмотреть вопрос о степени близости непрерывной модели к реальной ситуации.

В популяции, состоящей из одного человека, родившегося в момент времени t_0, функция $\rho(t)$ должна обладать двумя свойствами: если отрезок $[t_1, t_2]$ не содержит точки t_0, то $\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt = 0$, но если точка t_0 лежит на отрезке $[t_1, t_2]$, т. е. $t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$, то $\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt = 1$. Эти соотношения есть не что иное, как определение дельта-функции[1] $\delta(t-t_0)$, т. е. $\rho(t) = \delta(t-t_0)$.

Если же в популяции N членов, а i-й ее член родился в момент t_i, то

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i) \quad . \tag{2}$$

Функцию $\delta(t)$ именуют обобщенной функцией. Она может быть с любой точностью приближена непрерыв-

[1] Основные сведения о дельта-функции см. в работах: *Я. Микусинский* и *Р. Сикорский.* Элементарная теория обобщенных функций. Вып. 1. М., Изд-во иностранной литературы, 1959; вып. 2. М., Изд-во иностранной литературы, 1963; *Н. Я. Виленкин* и *др.* Функциональный анализ. Под ред. С. Г. Крейна. М., «Наука», 1964.

ными функциями в следующем смысле: для любого (сколь угодно малого) $h>0$ существует функция $\varphi_h(t)$ такая, что $\varphi_h(t)=0$ при $|t|>h$, и $\int_{-h}^{+h}\varphi_h(t)dt=1$.

Ясно, что $\int_{t_1}^{t_2}\varphi_h(t)dt$ равен 0, если отрезок $[-h, +h]$ не имеет общих точек с отрезком $[t_1, t_2]$, и равен 1, если отрезок $[-h, +h]$ целиком лежит в отрезке $[t_1, t_2]$. Заменим в формуле (2) $\delta(t)$ на $\varphi_h(t)$:

$$\rho_h(t)=\sum_{i=1}^{N}\varphi_h(t-t_i) \quad (3)$$

Если выбрать значение h столь малым, чтобы оно было, во-первых, меньше той точности, с какой мы измеряем время, а, во-вторых, чтобы среднее число рождений на отрезке длины $6h$ было незначительно по сравнению с числом рождений на рассматриваемых отрезках $[t_1, t_2]$, то можно добиться, чтобы для любого отрезка $[t_1, t_2]$, длина которого больше некоторой фиксированной величины D, и для любого $\varepsilon>0$ выполнялось условие

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}(\rho(t)-\rho_h(t))\,dt\right|<\varepsilon \quad (4)$$

Величины D и ε могут быть выбраны сколь угодно малыми, т. е. с точки зрения вычисления $N(t_1, t_2)$ и вообще любого интеграла $\int_{t_1}^{t_2}f(t)\rho(t)dt$, где функция $|f(t)|<1$, функция $\rho(t)$ может быть приближена $\rho_h(t)$ с любой точностью, а значит, задавшись фиксированной точностью, мы можем заменить не непрерывную функцию $\rho(t)$ непрерывной (или даже дифференцируемой) функцией $\rho_h(t)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что исходная функция $\rho(t)$ непрерывна.

Несколько сложнее обстоит дело с функцией $l\ (x, t)$. Отметим прежде всего, что численность живущих в реальной популяции меняется не непрерывно и что число смертей на отрезке возрастов $[x_1, x_2]$ может существенно отличаться от своего математического ожидания, а, следовательно, отношение числа событий к численности на-

селения, называемое частотой, может быть отлично от вероятности события. Однако в силу действия закона больших чисел это отличие тем меньше, чем многочисленнее популяция[2], и в достаточно многочисленных популяциях этим различием можно пренебречь. В силу этого мы можем допустить, что в рассматриваемой модели населения вероятность события совпадает с его частотой. Тогда число доживших до возраста x из совокупности родившихся за период $[t_1, t_2]$ составит

$$\int_{t_1}^{t_2} l(x, t)\rho(t)\,dt=S(x; t_1 t_2) \quad (5)$$

Подобрать непрерывно дифференцируемую по x и t функцию $l\ (x, t)$ так, что в реальной популяции

$$\left|S(x; t_1, t_2)-\int_{t_1}^{t_2} l(x, t)\rho(t)\,dt\right|<\varepsilon,$$

можно с помощью тех же допущений, что и функцию $\rho\ (t)$. При этом величина $l\ (x, t)$ будет характеризовать перспективы дожития лиц, родившихся не в момент t, а на некотором интервале $(t-h, t+h)$; величина $s(x;\ t_1, t_2)$, вычисленная по формуле (5), будет характеризовать не точную численность в возрасте x, а некоторую среднюю численность в интервале возрастов $(x-h,\ x+h)$.

В реальной статистике вероятность дожития вычисляется не для лиц, родившихся в данный момент t или в данный малый интервал времени, но для рожденных в течение, достаточно протяженного временного отрезка $[t_1, t_2]$. Такую совокупность называют реальным поколением родившихся в период t_1, t_2. В нашей модели эта вероятность, обозначим ее $l(x;\ t_1, t_2)$, находится по формуле

$$l(x; t_1, t_2)=\frac{\int_{t_1}^{t}\rho(t)\,l(x, t)\,dt}{\int_{t_1}^{t}\rho(t)\,dt}, \quad (6)$$

[2] Точную формулировку закона больших чисел см., например, в учебнике для втузов Е. С. Вентцель «Теория вероятностей» (М., Физматгиз, 1962).

или

$$l(x; t_1, t_2) = \frac{S(x;\ t_1, t_2)}{N(t_1, t_2)}. \tag{6а}$$

Исходя из функции $l(x, t)$ или $l\ (x;\ t_1, t_2)$, можно развернуть целую систему интервальных показателей, т. е. функций, характеризующих смертность на тех или иных возрастных интервалах. Выразим вероятность для лица, дожившего до точного возраста x, дожить до точного возраста $x+v$

$$_vp(x) = \frac{l(x+v)}{l(x)}. \tag{7}$$

Для реального поколения эта формула примет вид

$$_vp(x) = \frac{S(x+v;\ t_1, t_2)}{S(x;\ t_1, t_2)}. \tag{7а}$$

Вероятность для лица, дожившего до точного возраста x, умереть, не дожив до возраста $x+v$, составит

$$_vq(x) = 1 - {}_vp(x). \tag{8}$$

Обозначим через $M(x,\ x+v;\ t_1,\ t_2)$ число смертей в интервале возрастов $(x,\ x+v)$ у лиц, родившихся в интервале (t_1, t_2). Тогда

$$_vq(x) = \frac{M(x, x+v;\ t_1, t_2)}{S(x;\ t_1, t_2)}; \tag{8а}$$

$$_vd(x) = l(x) - l(x+v) - \tag{9}$$

вероятность для новорожденного умереть в интервале возрастов $(x,\ x+v)$;

$$_vL(x) = \int\limits_x^{x+v} l(y)\,dy - \tag{10}$$

среднее число лиц, доживших до возраста y, из интервала $(x,\ x+v)$, помноженное на длину интервала.

Интервальные показатели не только характеризуют уровень смертности данного возраста, но и позволяют с известной точностью восстанавливать функцию $l\ (x)$. Дело в том, что во многих практических ситуациях прямое вычисление $l\ (x)$ затруднено или невозможно. Особенно это касается открытых популяций, т. е. популяций с миграцией, выход из которых происходит не только по

причине смерти, а вход в которые возможен не только вследствие рождения. При изучении иных демографических процессов (брачности, плодовитости) повсеместно приходится сталкиваться с открытыми популяциями. В целом аналогичная ситуация встречается и при изучении смертности по причинам.

В условиях миграции число живущих в возрасте x из числа родившихся в интервале (t_1, t_2), т. е. $S\ (x;\ t_1, t_2)$, не является подсовокупностью родившихся. Возможно, $S(x;\ t_1,\ t_2) > N(t_1,\ t_2)$ или вообще $S(x+v;\ t_1,\ t_2) > S(x;\ t_1, t_2)$, и, следовательно, даже интервальные показатели не могут быть вычислены непосредственно.

В открытой популяции, строго говоря, чистый, прямой, смысл имеет показатель $\mu(x, t)$ — сила смертности. Величина $\mu\ (x)$ (мы упускаем время рождения для простоты записи) определяется следующим образом. Предполагается, что вероятность смерти в возрастном интервале $(x,\ x+\Delta x)$ для лиц, доживших до возраста x, пропорциональна Δx с точностью до бесконечно малых высшего порядка, т. е.

$$_{\Delta x}q(x) = c\Delta x + o(\Delta x), \tag{11}$$

где $o\ (\Delta x)$ стремится к 0 при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем Δx: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c\ (\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Коэффициент пропорциональности в возрасте x и есть $\mu\ (x)$.

Отсюда

$$l(x) - l(x+\Delta x) = l(x)\,\mu(x)\,\Delta x + l(x)\,o(\Delta x)$$

или

$$-\frac{l(x+\Delta x) - l(x)}{\Delta x} = l(x)\,\mu(x) + \frac{l(x)\,o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \longrightarrow 0$, имеем

$$-l'(x) = l(x)\,\mu(x). \tag{12}$$

Решая это уравнение, находим, что

$$\frac{d}{dx}\ln l(x) = -\mu(x), \tag{13}$$

или же

$$l(x) = e^{-\int\limits_0^x \mu(y)dy}, \tag{14}$$

так как $l(0) = 1$.

2*

Преимущество силы смертности $\mu(x)$ перед другими показателями состоит в том, что она описывает процесс на столь малом интервале, что в условиях сложного процесса (например, смертность в открытой популяции) на этом интервале *не может* произойти более одного события, т. е. вероятность того, что человек и мигрирует и умрет за интервал $(x, x+\Delta x)$, есть бесконечно малая порядка выше Δx.

В условиях открытой популяции все иные показатели, кроме μ, имеют смысл условной характеристики уровня смертности. Они описывают жизнь модельного замкнутого (постоянного) населения, которое существует на протяжении всей своей жизни в тех условиях, при том уровне смертности, который сложился на данной территории. Чем больше интервал, тем больше условность показателя, чем меньше — тем ближе модель к реальности, и лишь $\mu(x)$ — абсолютно адекватный показатель.

Однако $\mu(x)$ не может быть вычислен непосредственно. Как следует из определения,

$$\mu(x)=\lim_{v\to 0}\frac{{}_vq(x)}{v}, \qquad (15)$$

т. е. равен пределу отношения ${}_vq(x)/v$ при v стремящемся к 0. Практически переход к нулевому пределу можно заменить вычислением при достаточно малом v (которое может оказаться вполне зримой величиной).

Другой подход к $\mu(x)$ возможен со стороны табличного коэффициента смертности:

$${}_vm(x)=\frac{{}_vd(x)}{{}_vL(x)}. \qquad (16)$$

По определению ${}_vd(x)$ и ${}_vL(x)$ имеем

$${}_vm(x)=\frac{l(x)-l(x+v)}{\int\limits_x^{x+v} l(y)\,dy}=\frac{l(x)-l(x+v)}{l(x+\xi(v)\cdot v)\cdot v}$$

где $0\leqslant\xi(v)\leqslant 1$; равенство $\int\limits_x^{x+v} l(y)\,dy=l(x+\xi(v)\,v)\cdot v$ следует из теоремы о среднем. Переходя к пределу при $v\longrightarrow 0$, увидим, что

$$\mu(x)=\lim_{v\to 0}{}_vm(x). \qquad (17)$$

Однако $\mu(x)$ и ${}_vm(x)$ не следует смешивать полностью. Отметим, что ${}_vd(x)\equiv l(x)-l(x+v)=-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_x^{x+v} l(y)\,dy=-\frac{\partial}{\partial x}\,{}_vL(x)$. Промежуточное равенство следует из теоремы о том, что производная интеграла по верхнему пределу равна значению подинтегральной функции в этой точке, а по нижнему — ее значению со знаком минус.

Итак,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x^v}L(x)}{{}_vL(x)}=\frac{\partial}{\partial x}\ln{}_vL(x)=-\frac{{}_vd(x)}{{}_vL(x)}=-{}_vm(x), \qquad (18)$$

а это означает, что

$${}_vL(x)={}_vL(0)\,e^{-\int\limits_0^x {}_vm(y)dy}. \qquad (19)$$

Полученные формулы (18) и (19) можно интерпретировать следующим образом. Пусть для простоты $v=1$. Рассмотрим поколение, родившееся за период $[-1,0]$. Допустим, что на отрезке $[-1,0]$ плотность рождений постоянна, а общее число родившихся равно N. Ясно, что $\rho(t)=N; -1\leqslant t\leqslant 0$. Предположим[3], что функция $l(x, t)$ постоянна по t на отрезке $[-1,0]$. В этих условиях число лиц, доживших до точного возраста x, равно $Nl(x)$. Вычислим, чему равно число живущих в момент z:

$$\hat{S}(z)=\int\limits_z^{z+1} l(x)\rho(z-x)\,dx=N_1L(z). \qquad (20)$$

Таким образом, ${}_1L(x)$ в условиях постоянства плотности рождения на отрезке $[t, t+1]$ равно доле лиц из начальной совокупности родившихся, доживших до момента времени $z=x-t+1$.

Вернемся к нашему примеру. Из равенства (18) следует, что

$${}_1L(x)-{}_1L(x+\Delta x)={}_1m(x)\Delta xL(x)+o(\Delta x).$$

[3] Эти допущения являются стандартными гипотезами для реального поколения, принятыми при построении таблиц смертности.

Заменим x формально на z и, используя формулу (20), получим

$$\hat{S}(z)-\hat{S}(z+\Delta z)={}_1m(z)\,\Delta z\hat{S}(z)+o(\Delta z).$$

Таким образом, ${}_1m(z)\Delta z$ есть с точностью до бесконечно малой высшего порядка вероятность смерти на отрезке времени $[z,\ z+\Delta z]$. Итак, в отличие от пары $\mu(x)$, $l(x)$, характеризующей процесс вымирания по возрасту, ${}_vm(x)$, ${}_vL(x)$ характеризуют процесс вымирания как бы по времени.

В рамках того же примера отметим, что

$$_1m(x)=\frac{M(x,\,x+1;\,-1,\,0)}{\hat{S}(z;\,-1,\,0)}\tag{21}$$

при $z=x$.

Как мы уже говорили выше, миграция затрудняет вычисление и интервальных показателей, однако с помощью разумных гипотез о силе смертности и плотности миграции можно с известной достоверностью и точностью исчислять и интервальные показатели ${}_vq(x)$, ${}_vm(x)$ и другие, описывающие смертность не на бесконечно малом, а на конечном интервале v[4].

2. Гипотетическое поколение. Связь смертности реальных и гипотетических поколений

Всюду до сих пор мы рассматривали реальные поколения. Наряду с ними в демографии повсеместно изучается так называемое гипотетическое поколение. Более того, именно для гипотетического поколения строилось и строится большинство таблиц смертности.

Представим себе поколение людей, родившихся и проживших всю жизнь по законам, характерным для сегодняшней демографической ситуации. Такая, быть может, реально не существующая, совокупность людей и называется гипотетическим поколением сегодняшнего

[4] См., например: *В. В. Паевский.* Об измерении смертности мигрирующих масс населения. — «Труды Демографического института АН СССР», т. 1. Л., Изд-во АН СССР, 1934; *Ю. А. Корчак-Чепурковский.* О методах изучения воспроизводства населения. — В его кн. «Избранные демографические исследования». М., «Статистика», 1970, с. 73—86.

дня. Если ограничиться смертностью, то гипотетическим поколением следует назвать воображаемую совокупность людей, вся жизнь которых прошла в условиях смертности данного момента времени.

В тот период истории, когда возникла идея гипотетического поколения, смертность была почти неизменна с точностью до отдельных резких колебаний смертности, связанных с голодом и эпидемиями; так что смертность гипотетического поколения довольно точно отражала смертность реальных поколений и в случае выбора подходящего момента времени позволяла устранить влияние преходящих явлений. С развитием человечества в одних странах раньше, в других позже начался активный процесс снижения смертности, уровень смертности ныне ни в одной стране не постоянен. Однако модель гипотетического поколения вовсе не отпала, изменилась лишь интерпретация показателей, рассчитанных на ее основе.

Мы не будем приводить здесь аргументы в защиту гипотетического поколения. Укажем лишь, что иной способ характеристики смертности данного момента времени не известен и что при изучении динамики смертности за короткий промежуток времени, близкий к моменту наблюдения, так или иначе приходится пользоваться конструкцией, родственной гипотетическому поколению.

Наконец, при анализе смертности открытой популяции реальное поколение по году рождения само весьма условно, ибо не является постоянной совокупностью. Смертность в таком поколении характеризует условное население, всю жизнь прожившее в данных условиях.

Ниже мы дадим строгое определение гипотетического поколения.

Рассмотрим какой-нибудь треугольник ABC на демографической сетке (см. рис. 1).

Любые показатели, характеризующие демографические процессы как функцию возраста, могут быть расположены вдоль вертикальной линии жизни AC и относиться к реальному поколению людей, родившихся в некоторый момент t. Если мы возьмем конкретное поколение родившихся в какой-то определенный момент t_0 или в течение определенного отрезка времени от t_1 до t_2, то функция, которая в общем виде записывается как $f(x,t)$, для данного поколения приобретает вид $f(x,t_0)$, или $f(x;t_1,t_2)$. Выражаясь математически, функция

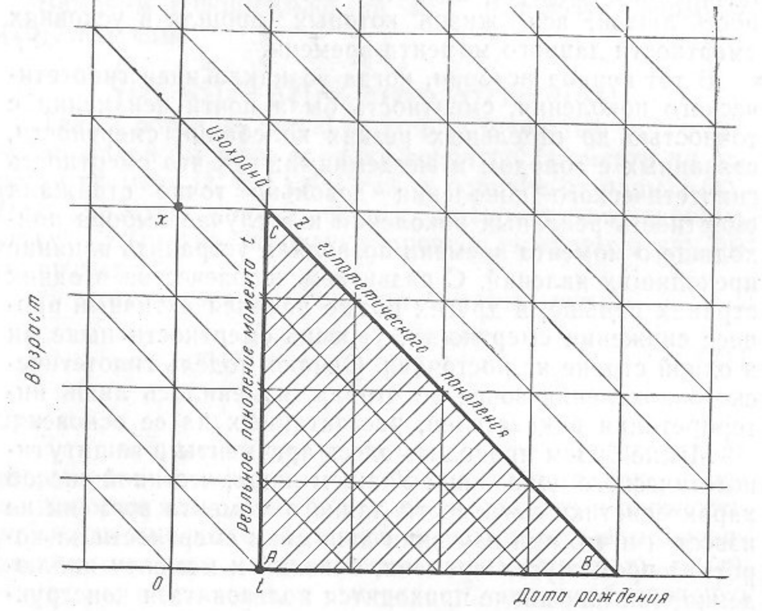

Рис. 1.

$f(x, t)$ ограничена на прямую $t=t_0$ или на полосу $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Не все показатели, о которых здесь идет речь, могут быть расположены также и вдоль линии наблюдения, или изохроны, — гипотенузы треугольника ВС. Эти показатели также характеризуют интенсивность демографических процессов в возрасте x, но уже не для конкретного поколения лиц, родившихся в фиксированный момент t_0, а для тех, кто в некоторый момент z находится в возрасте x, т. е. для тех, кто родился в момент $t_0=z_0-x$, свой для каждого x. Они описываются функцией $f(x, z_0-x)$, которую мы обозначим просто как $f(x; z_0)$. Тем самым мы ограничили все ту же функцию на изохрону $z_0=x+t_0$. Ее можно ограничить также на полосу изохрон $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ (если речь идет не о моменте, а о периоде наблюдения): $f(x; z_1, z_2)$.

Ограничение функции на полосу означает, что рассматривается среднее для данного интервала значение

$$f(x; t_1, t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t} f(x,t)\,dt \qquad (22)$$

или

$$f(x; z_1, z_2)=\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2} f(x, z-x)\,dz,$$

т. е. имеет место ограничение в среднем.

Теоретически можно представить себе такое поколение, которое характеризуется теми или иными демографическими показателями, описываемыми функцией $f(x; z_0)$ или $f(x; z_1, z_2)$, но в реальной действительности такого поколения не существует. Такую искусственную популяцию, в которой повозрастные демографические показатели равны повозрастным показателям, наблюдающимся в реальном населении в один и тот же момент или период времени, т. е. в которой $f(x)$ равно $f(x; z_0)$ или $f(x; z_1, z_2)$, называют, соответственно гипотетическим поколением момента z_0 или периода z_1, z_2.

На первый взгляд гипотетическое поколение, если не считать искусственного метода его построения, во всем напоминает реальное поколение, по образу и подобию которого оно создано. Однако на самом деле не так. Существует важное различие, которое заключается в следующем.

В реальном поколении значение любой демометрической функции в любом возрасте x отражает действительную историю данного поколения, что обеспечивает непротиворечивую связь между всеми функциями. В частности, если, как мы условились выше, говорить о смертности, то не может быть никакого противоречия, скажем, между функциями $\mu(x)$ и $l(x)$: если сила смертности в возрасте от 0 до 4 лет мала, то число доживающих до 5 лет обязательно отразит эту низкую смертность в предшествующих возрастах. Иначе говоря, если мы ограничим функцию $\mu(x,t)$ на прямую $t=t_0$ и исходя из полученной функции $\mu(x, t_0)$ формально построим функцию $l_{t_0}(x)$, а затем непосредственно ограничим $l(x, t)$ на прямую и получим $l(x, t_0)$, то всегда

$$l_{t_0}(x)=l(x, t_0), \qquad (23)$$

т. е. вероятность дожития в реальном поколении всегда равна ограничению функции дожития на прямую $t=t_0$.

Иначе обстоит дело в гипотетическом поколении.

Здесь значения биометрических функций в каждом возрасте отражают историю своего поколения (реального). Применительно к смертности это значит, что в условиях меняющейся, особенно колеблющейся, смертности неизбежно возникновение неувязок и противоречий между различными функциями. В гипотетическом поколении сила смертности в возрасте 0—4 года может быть мала, но число доживших до 5 лет $l(5)$ может отражать высокую смертность (например, в результате эпидемии, которая вспыхнула 4 года назад) в возрасте 0—1 год в том поколении, которому к моменту наблюдения исполнилось 5 лет, и потому быть гораздо меньшим, чем это можно было ожидать исходя из соответствующих значений $\mu(x, z-x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 5$ гипотетического поколения. В общем виде это значит, что если мы ограничим функцию $\mu(x, t)$ на изохрону z_0 и исходя из полученной функции $\mu(x, z_0)$ построим функцию $l_{z_0}(x)$, а затем непосредственно ограничим $l(x, t)$ на изохрону z_0, то в условиях меняющейся смертности получим

$$l_{z_0}(x) \neq l(x; z_0),$$

т. е. вероятность дожития в гипотетическом поколении не равна ограничению функции $l(x, t)$ на прямую z_0.

Сказанное справедливо для любых функций, описывающих смертность, если на их базе можно строить гипотетическое поколение. Ограничения их на вертикальную линию (или полосу) обязательно связаны каноническими соотношениями, записанными в формулах (6)—(19), а ограничения на изохрону или полосу изохрон могут не удовлетворять уравнениям (6)—(19), т. е. в условиях меняющейся смертности гипотетические поколения с разной исходной функцией могут не соответствовать друг другу. Поэтому гипотетическое поколение можно строить на базе какого-нибудь одного показателя, ибо два показателя могут оказаться взаимоисключающими.

Гипотетическое поколение может быть построено на базе такого показателя, из которого разворачиваются все другие. Формально имеется три возможности выбора такого показателя:

1) исходный показатель $\mu(x)$, приближенный с помощью ${}_vm(x)$ или ${}_vq(x)$;

2) исходный показатель $l(x)$;

3) исходный показатель $-l'(x)$, приближенный с помощью ${}_vd(x)$.

Несколько поясним, почему список возможных вариантов мы ограничили этими тремя. Прежде всего следует различать возможность расчета таблицы на базе данного показателя с той или иной степенью приближения и возможность развернуть систему функций из данной функции. Так, зная ${}_1q(x)$ для всех целых возрастов, можно построить таблицы смертности (однако ${}_1L(x)$ при этом будет найдено приближенно), но, даже зная ${}_1q(x)$ для всех x, мы не найдем точно ${}_{1/2}q(x)$, а зная ${}_{1/2}\,q(x)$, не найдем ${}_{1/4}\,q(x)$ и т. д.

Возможность строго вычислить все функции дает нам лишь *мгновенная* исходня функция. Именно все такие функции мы и собрали в нашем списке. Естественно, можно «сконструировать» иные функции с теми же свойствами, но мы ограничились функциями, так или иначе принятыми в демографии.

Поясним подробнее вариант 3. По определению производной,

$$-l'(x) = \frac{l(x)-l(x+\Delta x)}{\Delta x} + o(\Delta x), \tag{24}$$

где $o(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Так как $l(x)-l(x+\Delta x)$ есть вероятность для новорожденного умереть в интервале возрастов x, $x+\Delta x$, то показатель $-l'(x)$ — это аналог ${}_vd(x)$ на бесконечно малом интервале (т. е. когда $v \to 0$) в том же смысле, что $\mu(x)$ — аналог ${}_vq(x)$.

Обозначим $-l'(x)$ через $\lambda(x)$. Из формулы (24) следует, что

$$l(x) = 1 - \int_0^x \lambda(y)\,dy. \tag{25}$$

Исходя из любого из перечисленных показателей можно построить гипотетическое поколение, причем в зависимости от того, какой исходный показатель будет выбран, мы получим μ-гипотетическое, l-гипотетическое или λ-гипотетическое поколения. Хотя все они отражают одну и ту же реальную ситуацию, наблюдаемую в одном и том же населении в один и тот же момент, все эти гипотетические поколения будут обладать различными уровнями смертности. В табл. 1 приведены аналитические выражения для трех основных показателей μ, l и λ в трех типах гипотетических поколений. Из

Таблица 1

Сравнение основных показателей в гипотетических поколениях с различными исходными функциями

Тип гипотетического поколения	$\mu(x)$	$l(x)$	$\lambda(x)$
μ-гипотетическое поколение	$\mu(x, z-x)$	$l(x, z-x)\times e^{-\iint_{\Delta ABC}\mu'_t(x,t)dxdt}$	$\lambda(x, z-x)\times e^{-\iint_{\Delta ABC}\mu'_t(x,t)dxdt}$
l-гипотетическое поколение	$\mu(x, z-x)-\int_0^x \mu'_t(y, z-x)dy$	$l(x, z-x)$	$\lambda(x, z-x)-l(x, z-x)\times\int_0^x \mu'_t(y, z-x)dy$
λ-гипотетическое поколение	$\dfrac{\mu(x, z-x)l(x, z-x)}{l(x, z-x)+\iint_{\Delta ABC}\lambda'_t(x,t)dxdt}$	$l(x, z-x)+\iint_{\Delta ABC}\lambda'_t(x,t)dxdt$	$\lambda(x, z-x)$

Примечание. Треугольник ABC есть треугольник на демографической сетке (см. рис. 1) с вершинами $A=(z-x,\ 0)$, $B=(z, 0)$, $C=(z-x,\ x)$.

приведенных выражений ясно, что в условиях изменяющейся смертности, т. е. когда $\mu'_t(x,t)$ и $\lambda'_t(x,t)$ не равны 0, эти показатели могут быть различными.

Мы не будем приводить вывод всех формул табл. 1. Скажем лишь, что этот вывод во всех случаях однотипен и не представляет большой сложности[5].

[5] Величина $\lambda(x)$ в l-гипотетическом поколении

$$\lambda_z^l(x)=\frac{\partial}{\partial x}l_z^l(x)=\frac{\partial}{\partial x}l(x, z-x)=$$

$$=l(x, z-x)\,\mu(x, z-x)+l(x, z-x)\int_0^x \mu'_t(y, z-x)\,dy,$$

а

$$\mu^l_z(x)=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}l(x, z-x)}{l(x, z-x)}=\mu(x, z-x)-\int_0^x \mu'_t(y, z-x)\,dy.$$

Тем самым все формулы второй строки доказаны. По определению,

$$l_z^{\mu}(x)=e^{-\int_0^x \mu(y,\,z-y)dy},$$

$$\mu(x, z-x)=\mu^l_z(x)+\int_0^x \mu'_t(y, z-x)\,dy$$

и

$$\int_0^x \mu(\zeta, z-\zeta)\,d\zeta=\int_0^x \mu^l_z(\zeta)\,d\zeta+\int_0^x d\zeta\int_0^{\zeta}\mu'_t(y, z-\zeta)\,dy;$$

во втором интеграле сделаем подстановку $\zeta=z-t$, получим

$$\mu(x, z-x)=\int_0^x \mu^l_z(\zeta)\,d\zeta-\int_x^{z-x} dt\int_0^{z-t}\mu'_t(y, t)\,dy=$$

$$=\int_0^x \mu^l_z(\zeta)\,d\zeta+\iint_{\Delta ABC}\mu'_t(x, t)\,dxdt \quad \text{(см. рис. 1).}$$

Итак,

$$l_z^{\mu}(x)=l_z^l(x)\,e^{-\iint_{\Delta ABC}\mu'_t(x,t)dxdt}.$$

Наконец,

$$\lambda_z^{\mu}(x)=-\frac{\partial}{\partial x}l_z^{\mu}(x)=\mu_z^{\mu}(x)\,l_z^{\mu}(x)=\mu(x, z-x)\times$$

$$\times\, l(x, z-x)\,e^{-\iint_{\Delta ABC}\mu'_t(x,t)dxdt}=\lambda(x, z-x)\,e^{-\iint_{\Delta ABC}\mu'_t(x,t)dxdt}.$$

Таким образом, мы доказали и первую строку табл. 1. Третья строка доказывается аналогично.

Приведенные в табл. 1 формулы позволяют установить определенные зависимости между одними и теми же показателями для различных гипотетических поколений. Так, если имеется направленное изменение смертности, причем этот процесс идет монотонно, т. е. на протяжении рассматриваемого периода времени μ'_t и λ'_t меньше 0, то, как видно из табл. 1,

$$l(x, z-x) < \overset{\mu}{l_z}(x) < \overset{\lambda}{l_z}(x); \tag{26}$$

$$\mu^l_z(x) > \mu(x, z-x) > \mu^\lambda_z(x); \tag{27}$$

$$\lambda^l_z(x) > \lambda^\mu_z(x) > \lambda(x, z-x) \cdot \tag{28}$$

Таким образом, в любом возрасте x, до которого наблюдается монотонное снижение смертности, наибольшие значения чисел доживающих, наименьшая скорость снижения этих чисел и наименьшая сила смертности оказываются в λ-гипотетическом поколении, показатели которого можно поэтому считать наиболее оптимистическими. Этим объясняется, в частности, то, что введенный В. Я. Буняковским метод построения таблиц смертности с исходными $_v d(x)$ (подробное изложение метода см. в работе: «Курс демографии» под ред. А. Я. Боярского, с. 156—157), аналогом которых, как уже отмечалось, является функция $\lambda(x)$ дает самую низкую смертность. Важно отметить, что метод В. Я. Буняковского дает иное гипотетическое поколение, нежели метод с исходными $\mu(x)$. Мы нисколько не умаляем значения этого метода, однако следует признать, что сочетание в одной таблице двух типов гипотетического поколения, как это происходит при применении метода В. Я. Буняковского для детских возрастов, и так называемого демографического метода с исходным показателем q_x или m_x для прочих возрастов, не является целесообразным.

Обычно, говоря о гипотетическом поколении в связи с изучением смертности, имеют в виду μ-гипотетическое поколение. Ему соответствует большинство современных таблиц смертности, в частности все таблицы, построенные так называемым демографическим методом.

Предпочтение, которое отдается μ как исходному показателю при построении гипотетического поколения, не случайно. Сила смертности есть мера интенсивности

смертности в различных возрастах, причем нет никакой обязательной зависимости между отдельными значениями этого показателя; поэтому ряд $\mu(x)$ не может быть внутренне противоречивым. Хотя, по общему правилу, абсолютные значения $\mu(x)$ монотонно нарастают (если не считать их уменьшения в связи с парадоксом детской смертности), немонотонность функции $\mu(x)$ не является теоретически или практически невозможной.

Если же при построении гипотетического поколения исходить из $l(x)$ или $\lambda(x)$, то легко можно прийти к абсурду: функция $l(x)$ в условиях сильно меняющейся смертности может оказаться немонотонной (что бессмысленно, так как число доживающих до возраста x не может быть меньше числа доживающих до возраста

в '$(1 + x\int_\infty^0 \lambda(x)dx$, в принципе равный общему числу

умерших, т. е. 1, может быть от единицы отличен.

Как мы уже отмечали выше, в условиях меняющейся смертности смертность гипотетического[6] поколения не соответствует в целом смертности никакого реального поколения. Из табл. 1 следует связь между функциями $l(x)$ в реальном и гипотетическом поколениях, сходящимися в одной точке С (см. рис. 1):

$$l(x, z-x) = l_z(x)\, e^{-\iint\limits_{\Delta ABC} \mu'_t(x, t)\,dx\,dt} \cdot \tag{29}$$

Полезно проиллюстрировать эти формулы и различия на практическом примере. На рис. 2 приведены погодные вероятности умереть мужчин в Италии (детские возрасты) в реальных поколениях 1950—1956 гг.[7].

Имеющаяся в таблице информация позволяет построить таблицы смертности как для реального поколения 1950—1951 гг., так и для гипотетического поколения 1955—1956 гг. в смысле μ^-, λ^-, l^- гипотетических поколений. Так, $l(6)$ в реальном поколении, равная $l(6)$ в l-гипотетическом поколении, равна 0,9108244, в μ-гипотетическом поколении 0,936756, в λ-гипотетическом поко-

[6] Всюду в дальнейшем под гипотетическим поколением мы будем понимать μ-гипотетическое поколение.

[7] A. Naddeo. La mortalita in Italia dopo il 1950. Instituto di demografia Facolta'di scienze statistiche demografiche e attuariali dell'universita'di Roma. Roma, 1959.

лении, рассчитанном по методу В. Я. Буняковского — 0,936845. Отношение

$$\frac{l(6,t)}{l_z^{\mu}(6)} = 0{,}9723.$$

Мы попытались приблизительно оценить $\iint_{\triangle ABC} \mu^1(x,t)\,dxdt$ (см. рис. 2), пренебрегая тем, что реальные и гипотетические поколения интервальные, а не мгновенные. При этом мы считаем функцию $\mu(x,t)$ постоянной по x внутригодичных интервалов и линейно

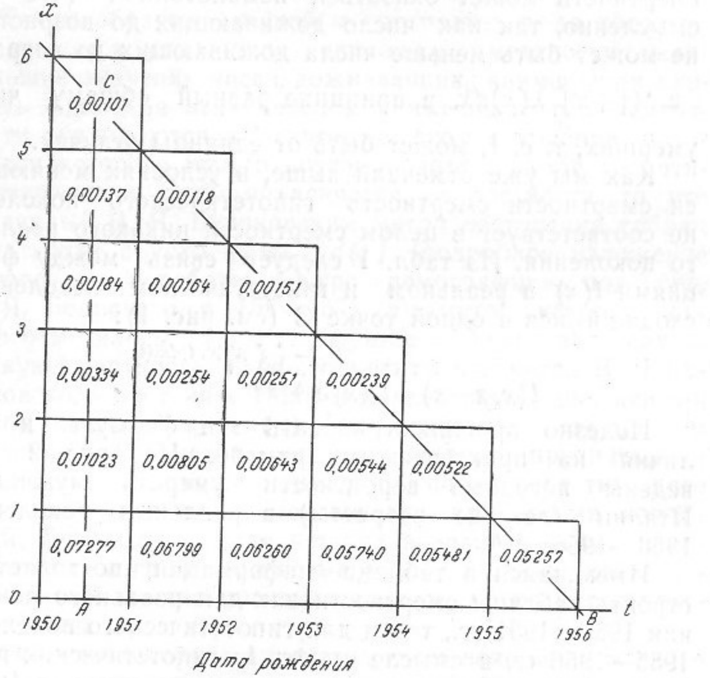

Рис. 2. Одногодичные вероятности смерти мужчин, родившихся в 1950—1956 гг. $({}_1q(x))$, Италия.

интерполировали ее по t. Полученный результат — 0,0289. Величина $e^{-0{,}0289} = 0{,}9715$. Некоторое расхождение вызвано погрешностями интегрирования.

Сравнение функций дожития в реальном и гипотетическом поколениях может быть продолжено и применительно к интервальным показателям.

Аналогично формуле (29) о связи $l_z(x)$ и $l(x, z-x)$ доказываются следующие соотношения (30). Положим $p(x_1, x_2) =_{x-x_1} p(x_1)$. Пусть $t_1 = z - x_2$, $t_2 = z - x_1$ (см. рис. 3). Имеют место следующие равенства:

$$\frac{p_z(x_1, x_2)}{p(x_1, x_2; t_1)} = e^{\iint_{\Delta EDG} \mu'_t(x,t)dxdt};$$

$$\frac{p(x_1, x_2; t_2)}{p_z(x_1\ x_2)} = e^{\iint_{\Delta GEF} \mu'_t(x,t)dxdt}. \qquad (30)$$

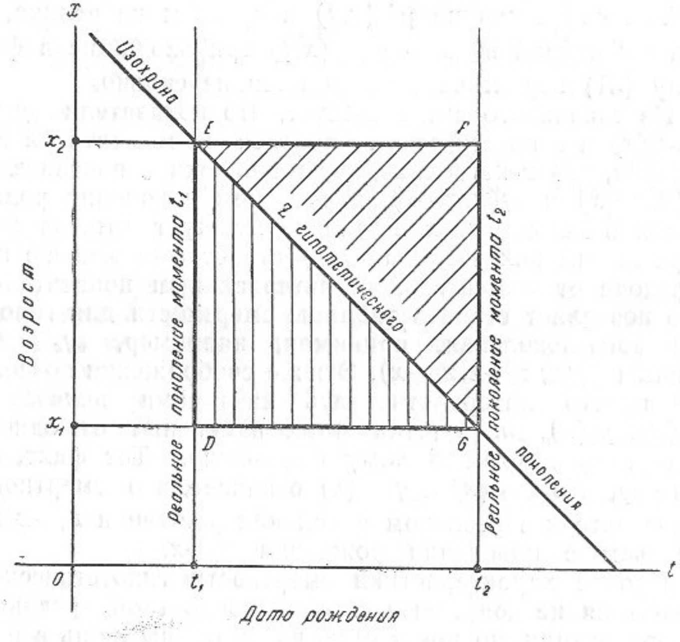

Рис. 3.

Если допустить, что $\mu'_t < 0$ в четырехугольнике $EDGF$, то легко убедиться, что

$$p(x_1, x_2, t_1) < p_z(x_1 x_2) < p(x_1, x_2, t), \qquad (31)$$

что доказывает, что смертность сегодняшнего μ-гипотетического поколения ближе к смертности будущих

3. Заказ 2893.

поколений, чем смертность прошлых поколений, в условиях направленного изменения смертности. Отметим, что в случае l- или λ-гипотетического поколения аналогичное утверждение не верно.

Формулы (30) характеризуют связь этих вероятностей.

Стоящие в показателе величины $\iint\limits_{\triangle EDG} \mu_t^{'} (x, t)dxdt$ $\iint\limits_{\triangle GEF} \mu_t^{'} (x,t)dxdt$ есть средние значения изменения силы смертности на этих участках демографической плоскости, помноженные на площадь соответствующих треугольников.

Так как величина $\mu_t^{'} (x,t)$ в среднем не велика, то при небольшой величине $\mu_t^{'} (x,t)$ три входящие в формулу (31) вероятности отличаются не сильно.

Из сказанного выше следует, что показатели ${}_vp_z(x)$ и ${}_vq_z(x)$ в гипотетическом поколении момента z при условии, что v не велико, весьма близки к показателям ${}_vp(x, z—x)$ и ${}_vq(x, z—x)$ в реальном поколении родившихся в момент $z—x$. Различие между гипотетическим и реальным показателем ${}_vq(x)$ станет еще меньше при переходе от моментных к интервальным показателям. Это позволяет строить таблицы смертности для гипотетического поколения, принимая, например, ${}_vq_{z_1 z_2}(x)$ равным ${}_vq(x; z_1—x, z_2—x)$. Эти же соображения позволяют просто интерпретировать как сами показатели ${}_vq_z(x), {}_vp_z(x), {}_vm_z(x)$, так и их изменение от одного к другому гипотетическому поколению. Тот факт, например, что ${}_vq_z(x) < {}_vq_{z_1}(x)$ означает, что смертность в возрасте x в реальном поколении рождения $z_2—x$ ниже, чем в поколении рождения $z_1—x$.

Прочие характеристики смертности гипотетического поколения не допускают столь конкретной реальной интерпретации, но могут быть рассмотрены лишь в рамках первоначальной модели поколения, родившегося и прожившего всю жизнь в условиях смертности сегодняшнего дня. Вопрос о том, в какой степени эти показатели характеризуют сегодняшний уровень смертности и как их динамика от одного гипотетического поколения к другому отражает реальное изменение смертности, до сих пор остается открытым. Наконец, весьма важной является задача найти один или несколько

показателей, количественно оценивших такое понятие, как уровень смертности, и даже отвечающих на вопрос о благоприятности или неблагоприятности или, точнее, о степени благоприятности изменения смертности.

Оценка этих изменений не вызывает трудностей, когда ${}_vq(x)$ или $\mu(x)$ снижается с ростом t во *всех* возрастах. Сложность поставленной проблемы состоит в том, что такое снижение смертности не единственно возможное, ибо часто наряду со снижением смертности в одних возрастах наблюдается ее рост в некоторых других. Кроме того, темп снижения смертности в разных возрастах различен, а различные сочетания повозрастных темпов снижения дают и разные итоговые уровни смертности.

3. Анализ возможных универсальных характеристик уровня смертности

Существует ряд показателей, претендующих на роль измерителей уровня смертности. Они представляют собой те или иные средние (типа средний возраст умерших).

Они могут быть вычислены как в гипотетическом поколении любого типа, или то же самое, в стационарном населении с данным уровнем смертности, так и в реальном поколении и во всем населении в данный период времени.

В разных случаях эти средние разнятся количественно и несут разную информацию.

Первый такой показатель — средняя продолжительность предстоящей жизни в возрасте x лет:

$$e(x) = \frac{\int\limits_x^\infty l(y)\,dy}{l(x)}\ . \qquad (32)$$

В реальном поколении величина $e(x;\ t_1,\ t_2)$ действительно равна среднему числу лет предстоящей жизни у лиц, доживших до возраста x лет. Известно, что

$$e(x)=\frac{\int\limits_x^{\infty}(y-x)\lambda(y)\,dy}{l(x)},$$

т. е. средняя продолжительность предстоящей жизни $e(x)$ равна среднему возрасту умерших в возрасте свыше x, уменьшенному на x. Величина $e(x)$ может быть вычислена и в гипотетическом поколении:

$$e(x)=\frac{\int\limits_x^{\infty}l_z(y)\,dy}{l_z(x)}.$$

Аналогично может быть вычислен средний возраст живущих в возрасте свыше x в стационарном населении с данным уровнем смертности

$$g(x)=x+\frac{\int\limits_x^{\infty}(y-x)\,l(y)\,dy}{\int\limits_x^{\infty}l(y)\,dy}. \qquad (33)$$

На наш взгляд, показатель $g(x)$ заслуживает гораздо больше внимания, чем ему уделяется в настоящее время.

Рассмотрим следующую задачу. Допустим, что мы строим гипотетическое поколение периода z_1, z_2, на базе повозрастных чисел умерших и повозрастных численностей населения.

По одному гипотетическому поколению судить об изменении смертности нельзя; поэтому пусть у нас имеется и информация о числах рождений за предшествующие годы. Тогда мы можем построить не только μ-гипотетическое поколение, но и l-гипотетическое поколение и λ-гипотетическое. Имея в наличии три гипотетических поколения данного периода или данного момента, уже можно оценить тенденции изменения смертности, опираясь на формулы, приведенные в табл. 1. Так, если

$$l(x, z-x) < \overset{\mu}{l_z}(x)$$

или $$\qquad (34)$$

$$\lambda(x, z-x) < \overset{\mu}{\lambda_z}(x),$$

то это означает, что в треугольнике ABC (см. рис. 1), точнее, в поколениях родившихся на отрезке $[z-x, x]$ за годы, предшествующие z, наблюдалась общая тенденция снижения смертности. Точно так же факт, что

$$e^{\mu}_z(0) > e^{l}_z(0), \qquad (35)$$

говорит об общей тенденции снижения смертности в поколениях, доживших до момента z. На практике величину $e^{\mu}_z(0)$ можно вычислить как среднюю продолжительность предстоящей жизни, а величину $e^{l}_z(0)$, зная числа родившихся $N(t, t+1)$ и числа живущих в

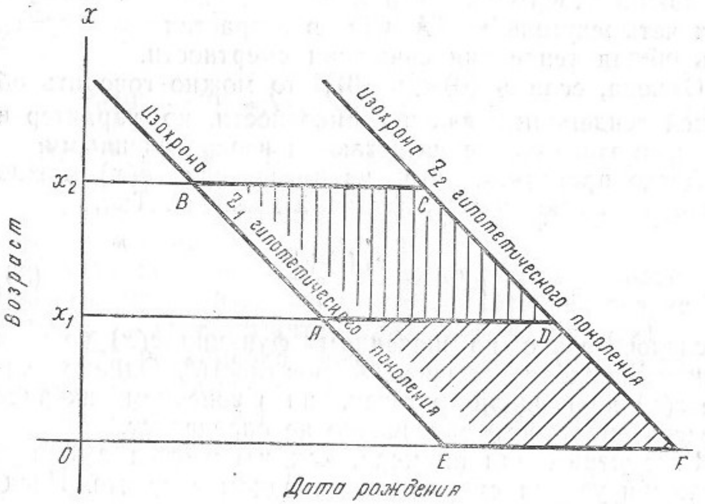

Рис. 4.

момент z в интервале возрастов $(x, x+1)$ — $\hat{S}(z,x)$, найти по приближенной формуле

$$e^{l}_z(0) \approx \sum_{n=0}^{\omega}\frac{\hat{S}(z,n)}{N(z-n-1,\ z-n)}, \qquad (36)$$

где ω — предельный возраст живущих.

Допустим теперь, что мы сравниваем два гипотетических поколения моментов времени z_1 и z_2 (см. рис. 4).

Точно так же, как выводятся формулы (30), можно показать, что

$$\frac{p_{z_1}(x_1, x_2)}{p_{z_2}(x_1 x_2)} = e^{\underset{ABCD}{\int\int} \mu'_t(x, t)dxdt} \qquad (37)$$

или

$$\frac{l_{z_1}(x_1)}{l_{z_2}(x_1)} = e^{\underset{ADEF}{\int\int} \mu'_t(x, t)dxdt}.$$

Ясно, что если

$$p_{z_1}(x_1, x_2) < p_{z_2}(x_1, x_2), \qquad (38)$$

то можно утверждать, что в поколениях, пронизывающих четырехугольник ABCD в возрастах $x_1 \leqslant x \geqslant x_2$, есть общая тенденция снижения смертности.

Отсюда, если $e_{z_1}(0) < e_{z_2}(0)$, то можно говорить об общей тенденции снижения смертности, но характер и качество этого снижения остаются неопределенными.

Легко проверить, что из показателя $e(x)$ можно развернуть всю систему функций дожития. Так,

$$\mu(x) = \frac{e'_x(x) + 1}{e(x)} \qquad (39)$$

и, следовательно, по значениям функции $e(x)$ во всех точках определяется уровень смертности[8]. Однако знание $e(x)$ ни в одной из точек, ни в конечном их ряде уровень смертности однозначно не определяет.

Рассмотрим для примера, как изменяется $e(0)$ при снижении уровня смертности в одном возрасте. Предположим, что уровень смертности изменился на отрезке x, $x+v$ так, что ${}_vd(x)$ уменьшилось на $\Delta_{d,v}L(x)$ увеличилось на Δ_L, а вне этого отрезка никаких изменений не произошло.

Величина $e(0)$ до изменения смертности равна $\int\limits_0^x l(y)\,dy + {}_vL(x) + l(x+v)\,e(x+v)$, а после изменения равна $\widetilde{e}(0) = \int\limits_0^x l(y)\,dy + {}_vL(x) + (l(x+v) + \Delta_d)\,e\,(x+v) + \Delta_L$.

Ясно, что

$$\widetilde{e}(0) - e(0) = \Delta_L + \Delta_d(e(x+v)).$$

Если снижение смертности равномерно на отрезке $[x, x+v]$, то

$$\widetilde{e}(0) - e(0) = \Delta_d\left(\frac{v}{2} + e(x+v)\right). \qquad (40)$$

Отсюда следует, что снижение смертности в возрасте x тем сильнее влияет на $e(0)$, чем больше $e(x+v)$, т. е. снижение смертности в молодых возрастах существеннее, чем изменение в старческих.

Исходя из равенства (40) можно записать более общую формулу изменения $e(0)$, если в возрастах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (т. е. на интервалах x_i, x_i+1 при $i=1,\ldots,n$) смертность равномерно снизилась на Δ_i; однако такая формула вряд ли прояснит дело.

Показатель, адекватно характеризующий смертность, в принципе реален, ибо в целом ряде работ[9], связанных с модельными таблицами смертности, если не доказано, то убедительно показано, что множество функций $l(x)$, описывающих смертность человеческих популяций, не бесконечномерно, а имеет размерность порядка четырех.

---

[8] Действительно,

$$e'_x(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{\int\limits_x^\infty l(y)\,dy}{l(x)} =$$

$$= \frac{-l(x)\,l(x) - [-\mu(x)\,l(x)] \int\limits_x^\infty l(y)\,dy}{l^2(x)};$$

отсюда $e'_x(x) = -1 + \mu(x)\,e(x)$; из этого равенства непосредственно следует (39).

[9] См., например: *S. Lederman, J. Breas.* Les dimensions de la mortalité. — «Population», vol. 14, 1959, № 4; «Factor Analysis of Sex — Age Specific Death Rates». — «Population Bulletin of the United Nations», 1962, № 6, p. 149—201.

К. Ю. ШАБУРОВ

ТАБЛИЦЫ ДОЖИТИЯ И ПРИЧИНЫ СМЕРТИ

Наиболее совершенным приемом изучения процессов естественного движения населения одновременно на всех интервалах возраста является построение демографических таблиц. В частности, наглядно показать числовую характеристику интенсивности повозрастной смертности населения позволяют только таблицы смертности, или дожития. В настоящее время чаще всего строятся таблицы смертности, которые отражают дожитие до отдельных возрастов не какого-то реального поколения, а гипотетической совокупности родившихся, поставленной в условия повозрастной смертности того периода, за который взяты данные об умерших в сочетании с данными о численности населения (такой способ построения таблиц называют еще косвенным). Числа живущих таблиц смертности дают возрастную структуру, полученную в результате последовательного воздействия на условную совокупность родившихся тех повозрастных коэффициентов смертности, которые реально имеют место в изучаемый период. Таким образом, таблица смертности является отражением тех экономических, социальных и санитарно-гигиенических условий, в которых существует в данный период или существовало в недавнем прошлом реально взятое население. Уровень санитарной культуры общества, его экономическое развитие во многом обусловливают величину средней продолжительности предстоящей жизни населения, а также те причины смерти, которыми определяется величина этого показателя.

Обычные таблицы дожития, построенные для населения, взятого в определенный исторический период, дают представление лишь о характере повозрастной

смертности населения и о величине средней продолжительности жизни в том или ином возрасте.

Для более детального анализа процесса смертности наряду с обычными таблицами строятся таблицы дожития в сочетании с распределением умерших по причинам смерти.

Надо отметить, что при изучении причин смертности удобнее пользоваться краткими таблицами смертности. Во-первых, сам ход расчета весьма громоздок для полных таблиц, во-вторых, небольшое число умерших от отдельных причин смерти часто делает практически невозможным расчет полных таблиц.

Существует два вида таблиц смертности в сочетании с данными о причинах:

1. Таблицы смертности, *дифференцированные по причинам смерти,* которые строятся на основе зависимых вероятностей умереть и представляют собой более детализированную конструкцию обычных таблиц смертности.

2. *Гипотетические* таблицы смертности, построенные с учетом снижения или полного устранения смертности от той или иной причины. В дальнейшем будем называть их просто гипотетическими таблицами смертности. В основе построения этих таблиц лежат независимые, или чистые, вероятности умереть[1]. Это соответствует допущению о том, что если рассматривать бесконечно малый промежуток времени, то ликвидация какой-либо причины смерти не влияет на уровень смертности от всех других причин и лица, умиравшие ранее от этой причины, все доживают до конца рассматриваемого отрезка времени.

Гипотетическую таблицу, полученную при условии прекращения действия какой-либо причины смерти, как будет показано в дальнейшем, можно также развернуть в таблицу, дифференцированную по причинам, выявив тем самым, в какой степени ликвидация одной причины влияет не только на общий порядок вымира-

---

[1] Подробно понятия «зависимая вероятность» и «независимая вероятность» рассматривает М. В. Птуха (см. *М. В. Птуха.* Очерки по статистике населения. М., Госстатиздат, 1960, гл. III). Эти понятия употребляются здесь в смысле, отличном от принятого в теории вероятностей.

ния, но и на смертность от каждой из оставшихся причин.

В литературе о причинах смерти и первый и второй типы таблиц часто называют таблицами смертности по причинам смерти, что, по-видимому, не совсем отвечает точной постановке вопроса, так как если в первом случае таблицы в самом деле характеризуют структуру смертности от ряда причин, то во втором это скорее таблицы, сконструированные без учета влияния смертности от какого-то набора причин. Поэтому мы и взяли различные термины для обозначения тех и других таблиц.

Таблицы двух указанных типов существенно различаются методами их построения и, что особенно важно, своими аналитическими возможностями; так что применение тех или других таблиц может быть предопределено задачами исследования. Разумеется, наиболее полную картину смертности в зависимости от причин дает совместное использование таблиц обоих типов.

Известный советский демограф В. В. Паевский отмечает, что «обычная таблица смертности затрагивает вместе с тем лишь одну сторону смертности — ее *повозрастные* изменения. Ничто не мешает, однако, несколько расширить систему показателей, называемую «таблицей смертности», распространив ее еще на одну сторону, а именно на *причины смерти*»[2].

Эти слова В. В. Паевского иногда цитируют в связи с рассмотрением *гипотетических* таблиц смертности[3]; между тем они относятся как раз к таблицам, *дифференцированным по причинам.* Именно эти таблицы являются «расширенными» таблицами смертности и служат для анализа структуры причин смерти. Гипотетические же таблицы смертности в процессе анализа позволяют учесть роль и значение отдельных причин смерти. В частности, эти таблицы позволяют оценить влияние смертности от конкретных причин (их групп) на уменьшение величины средней продолжительности жизни.

---

[2] *В. В. Паевский.* Вопросы демографической и медицинской статистики. М., «Статистика», 1970, с. 444.

[3] См., например: *М. С. Бедный.* Продолжительность жизни. М., «Статистика», 1967, с. 123.

При изучении динамики смертности от тех или иных причин, а также при сопоставлении структуры причин смерти различных групп населения на первом этапе можно пользоваться общими или повозрастными показателями смертности по причинам. Следует лишь учесть влияние возраста на распределение смертных случаев от различных причин. Одни причины доминируют в младших возрастах, другие — в старческих, и, естественно, чем больше в населении удельный вес, например, старческих возрастных групп, тем больше и доля умерших от причин, которые свойственны пожилому возрасту.

Для устранения влияния различий в возрастном составе населения можно использовать стандартизованные показатели смертности, т. е. показатели, вычисленные при условном допущении одинакового возрастного состава сравниваемых групп населения. Но, как известно, общие и повозрастные показатели не дают еще полной характеристики интенсивности демографических процессов, в том числе и смертности по причинам, что приводит к необходимости в такой системе показателей, которая с возможно большей полнотой отражала бы структуру смертности населения. Такой системой показателей и являются таблицы смертности, дифференцированные по причинам смерти.

Основой построения *дифференцированных таблиц* служат показатели обычной (можно назвать ее базовой) таблицы смертности, а также данные об умерших, разработанные по причинам смерти.

Числа умерших (d_x) обычной таблицы смертности при отнесении к числу доживших до возраста x лет дают нам вероятность умереть в интервале возраста x, $x+1$. В то же время общее число умерших не является абстрактным: оно составлено из умерших от вполне определенных причин, где каждая i-я причина уносит какую-то часть человеческих жизней; причем $\Sigma d_{xi}=d_x$. Следовательно, общее число умерших можно распределить по причинам смерти. Тогда умершие от каждой причины (или группы причин) составят определенную долю общего числа смертей, сумма же долей всех причин, естественно, будет равна единице.

Таким образом, зная вероятность умереть (q_x) обычных таблиц, а также доли причин в общем числе смертей, легко рассчитать частные вероятности смерти от отдельных причин и на их основе составить таблицы смертности по причинам. Так, частная вероятность смерти от i-й причины в возрасте x лет выразится как

$$q_{xi}=q_x w_{xi},$$

где w_{xi} — доля смертей от i-й причины среди общего числа смертей. Аналогично имеем

$$d_{xi}=d_x w_{xi}.$$

Сумма частных вероятностей умереть от отдельных причин, а также сумма чисел умерших дифференцированной таблицы при условии включения в нее всего набора причин будет соответственно равна общей вероятности умереть и общему числу умерших обычных таблиц.

Таблицы смертности, рассчитанные для всех возрастов и для всех групп причин (таблица, рассчитанная для всех причин, принятых в международной классификации, была бы слишком громоздкой), представляют собой полную характеристику смертности изучаемого населения. Такие таблицы весьма удобны, когда ставится задача сравнить режим смертности населения различных групп, регионов или смертность на различных этапах развития общества.

В качестве примера использования таблиц смертности, дифференцированных по причинам, рассмотрим таблицы для мужчин и женщин Англии и Уэльса, соответствующие условиям смертности 1963 г.

Имея числа умерших обычных кратких таблиц и долю смертей от изучаемых причин (в нашем случае от инфекционных заболеваний, от злокачественных новообразований, от сердечно-сосудистых заболеваний, от несчастных случаев всех видов и от всех прочих причин), рассчитаем вероятность умереть и числа умерших в каждом пятилетнем возрастном интервале от всех вышеназванных причин (табл. 1 и 2 приложения).

В последней строке этих таблиц приведены общие вероятности умереть от каждой из причин на протяжении всей жизни. Эти вероятности рассчитаны исходя из чисел умерших по пятилетним возрастным интервалам и в каждом случае равны общей сумме чисел умерших от определенной причины, отнесенной к числу родившихся:

$$Q_i=\frac{D_i}{l}.$$

Эти вероятности, для большей наглядности умноженные на 1000, приведены в табл. 1. Они позволяют судить о сравнительной роли различных причин в смертности мужчин и женщин в условиях возрастной структуры, которая складывается только под влиянием вымирания в результате действия этих причин. Последнее обстоятельство выгодно отличает эти показатели от стандартизованных коэффициентов смертности по причинам, которые отражают также посторонние факторы, воздействующие на формирование возрастной структуры, принятой за стандарт.

Таблица 1

Вероятность умереть (Q 1000) на протяжении всей жизни и средний возраст смерти от различных причин (Англия и Уэльс, 1963 г.)

Причины смерти	Вероятность умереть (Q 1000)		Средний возраст смерти ($\bar{x}_i$)	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
Инфекционные заболевания	12,79	6,58	51,5	48,2
Злокачественные новообразования	187,12	157,25	66,8	68,3
Сердечно-сосудистые заболевания	494,15	564,60	77,2	78,7
Все виды несчастных случаев	38,75	31,95	42,1	62,2
Прочие виды причин смерти	267,19	239,62	66,5	71,2
Все причины	1000	1000	68,2	74,5

Как свидетельствуют данные, приведенные в табл. 1, в смертности женщин гораздо большее место, чем у мужчин, занимают сердечно-сосудистые заболевания, тогда как вероятность умереть от каждой из всех остальных причин у женщин меньше, чем у мужчин.

Однако эти данные сами по себе не позволяют дать сравнительную оценку условий смертности мужчин и женщин Англии и Уэльса. То обстоятельство, что вероятности умереть по различным причинам у мужчин и женщин различны, еще ни о чем не говорит, потому что в конце концов все люди умирают по какой-либо причине. Важно знать, как связаны причины смерти с возрастом, в котором наступает смерть, поскольку весьма существенно, умирает ли человек в более молодом или более позднем возрасте.

Для того чтобы выяснить этот вопрос, можно было бы обратиться к повозрастным вероятностям умереть от различных причин или к соответствующим числам умерших, но непосредственное рассмотрение как тех, так и других затруднено их большим числом и не позволяет делать обобщающих выводов. Однако применение таблиц смертности дает возможность использовать широкоизвестный синтетический показатель — среднюю продолжительность предстоящей жизни (средний табличный возраст смерти), который одной цифрой достаточно полно характеризует повозрастное распределение смертей.

Уже рассмотрение общей средней продолжительности предстоящей жизни новорожденного показывает, что это распределение у мужчин и женщин неодинаково: e_0^0 у мужчин — 67,9 года, у женщин — 73,8 года, т. е. на 5,9 года больше. Связано ли это различие с различием в структуре причин смерти и если связано, то как?

Таблицы смертности, дифференцированные по причинам, позволяют вычислить средний возраст смерти от той или иной причины (среднюю продолжительность жизни умерших от данной причины), который равен:

$$E_{0i}^{0}=\overline{x}_i=\frac{\sum\limits_{0}^{\omega} d_{xi}(x+0{,}5)}{D_i}=\frac{\sum\limits^{\omega} d_{xi}(x+0{,}5)}{w_i l_0}. \qquad (1)$$

Если найти среднюю взвешенную (весами служат числа w_i — доли смертей от каждой причины в общем числе смертей) из средних возрастов смерти от каждой причины, то мы получим табличный средний возраст смерти от всех причин, или среднюю продолжительность жизни. В самом деле:

$$\frac{\sum\limits_i \overline{x}_i w_i}{\sum\limits_i w_i}=\sum_i\frac{\sum\limits_x d_{xi}(x+0{,}5)}{w_i l_0}w_i=\frac{1}{l_0}\sum_i\sum_x d_{xi}(x+0{,}5)=$$

$$=\frac{\sum\limits_x d_x(x+0{,}5)}{l_0}=e_0^0 \qquad (2)$$

при условии, что $\sum\limits_i w_i=1$.

Таким образом, общая средняя продолжительность жизни зависит как от доли смертей от каждой причины в общем числе смертей, так и от среднего возраста смерти от каждой причины. Чтобы проанализировать влияние каждого из этих факторов, рассмотрим показатели, приведенные в табл. 1.

Показатели первых двух столбцов таблицы заимствованы из табл. 1 и 2 приложения (и умножены на 1000), показатели третьего и четвертого столбцов получены на основании чисел d_{xi} таблиц приложения по формуле (1) с учетом того, что для кратких таблиц она принимает вид

$$\overline{x}_i=\frac{\sum d_{xi}(x+2{,}5)}{D_i}.$$

Некоторое расхождение величин общей средней продолжительности жизни в таблицах приложения и в табл. 1 (в первом случае для мужчин $e_0^0=67{,}9$ года, для женщин $e_0^0=73{,}8$ года, во втором случае — соответственно 68,2 и 74,5) связано с методом вычисления табличного числа живущих в возрасте 85 лет и старше в таблицах приложения. Они построены в предположении, что вся совокупность родившихся полностью вымирает к возрасту 100 лет. Средний интервал возраста смерти для лиц, достигших 85 лет, берется, таким образом, равным 7,5 года. В этом случае табличное число живущих в возрасте 85 лет и старше должно быть приравнено величине $d_{85}\cdot 7{,}5$. В таблицах же числа живущих в этих возрастах вычислялись на основании истинной величины средней продолжительности жизни в возрасте 85 лет, взятой из таблиц смертности для Англии и Уэльса.

Табл. 1 позволяет оценить вклад каждого фактора — различий в структуре причин смерти и в среднем возрасте смерти от каждой причины — в общую разницу в средней продолжительности жизни мужчин и женщин, которая в нашем примере составляет 74,5—68,2=6,3 года. Действительно, если предположить, что различия в структуре причин смерти исчезли и вероятность умереть от каждой из причин у мужчин стала бы такой же, какой она была у женщин, то общая средняя продолжительность жизни мужчин стала бы

$$\sum_i \overline{x}_i^{\,м} w_i=68{,}9 \text{ года},$$

что на 0,7 года больше фактически наблюдавшейся величины.

Если же, наоборот, структура причин смерти осталась бы неизменной, но средний возраст смерти от отдельных причин у мужчин стал бы таким же, каким он был у женщин, то средняя продолжительность жизни достигла бы

$$\sum_i \bar{x}_i^{ж} \omega_i = 73{,}8 \text{ года},$$

т. е. увеличилась бы на 5,6 года.

Таким образом, разница в 6,3 года между длительностью жизни мужчин и женщин лишь в незначительной степени объясняется различиями в структуре смертности по причинам; главное же объяснение этой разницы заключается в том, что от целого ряда одинаковых причин мужчины умирают в более молодом, чем женщины, возрасте. В частности, от сердечно-сосудистых заболеваний, которые составляют свыше 49% всех причин смерти у мужчин, они умирают в среднем на 6,5 года раньше, чем женщины.

Показатели, приведенные в табл. 1, характеризуют вероятности смерти и табличный средний возраст умерших от различных причин для новорожденного на протяжении всей его жизни. Но дифференцированные по причинам таблицы смертности позволяют вычислить соответствующие показатели для любого возраста и в любом возрастном интервале (например, вероятность смерти от травматизма на протяжении трудоспособного возраста: в этом случае числа умерших будут отнесены не к начальной совокупности родившихся, а к числу доживших до возраста вступления в трудоспособный контингент).

Выявив описанным выше образом влияние структуры причин смерти и возраста смерти от отдельных причин, мы тем не менее не можем установить непосредственно влияние каждой из групп причин на величину средней продолжительности предстоящей жизни. Как изменилась бы последняя, если бы какая-либо причина смерти стала действовать слабее или вовсе отпала?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо знать, как будут вымирать люди, умиравшие раньше от исключаемой причины. Так как они не остаются бессмертными, а умирают от всех оставшихся причин, вероятности умереть от

этих причин как в целом, так и в каждом отдельном возрасте, видимо, изменятся. Переход к новым вероятностям умереть после исключения (частичного или полного) какой-либо причины смерти, естественно, приводит к построению новой таблицы, которую мы и называем *гипотетической таблицей смертности*. В отличие от обычной таблицы, дифференцированной по причинам, которая наглядно показывает структуру причин смерти в связи с порядком вымирания стационарного населения в изучаемый период, гипотетическая таблица дает возможность выявить непосредственное влияние тех или иных причин на величину средней продолжительности жизни и на все биометрические функции таблиц.

Гипотетические таблицы смертности имеют большое практическое значение, потому что они помогают правильно оценить эффективность борьбы с отдельными причинами смерти и выбрать наилучший путь к повышению средней продолжительности жизни.

Это значение гипотетических таблиц было осознано еще в XVIII в., когда известный математик Д. Бернулли попытался оценить влияние инокуляции оспы, целесообразность которой тогда оспаривалась, на уменьшение смертности и увеличение средней продолжительности жизни. Несколько позже вопросом о влиянии устранения какой-либо причины смерти на среднюю продолжительность жизни занимался французский демограф Э. Дювийяр. Однако, как отмечает М. В. Птуха, «....теория Бернулли—Дювийяра долгое время лежала мертвым капиталом. Только основоположник английской современной государственной статистики населения У. Фарр для исчислений сокращения продолжительности жизни от разных болезней снова обратился к этому методу; систематически применял его также знаменитый немецкий статистик Бёк при изучении населения Берлина, а в последнее время — Дублин при изучении населения Нью-Йорка»[4].

Вопросами теоретического обоснования возможности построения таблиц смертности при условии устранения отдельных причин занимался также французский ученый О. Курно[5].

[4] *М. В. Птуха*. Очерки по истории статистики XVII—XVIII веков. М., Госполитиздат, 1945, с. 261—262.

[5] *О. Курно*. Основы теории шансов и вероятностей. М., «Наука», 1970, с. 276.

4. Заказ 2893.

В СССР Ю. А. Корчак-Чепурковский изучал влияние смертности от туберкулеза на среднюю продолжительность жизни населения Украины. Ряд работ А. М. Меркова посвящен изучению смертности на Украине от злокачественных новообразований с учетом влияния на среднюю продолжительность жизни. В связи с построением гипотетических таблиц смертности следует упомянуть также имена Р. Н. Бирюковой и М. С. Бедного[6].

В основе таблиц смертности, построенных с учетом устранения смертности от какого-либо заболевания, лежит показатель, называемый независимой, или чистой, вероятностью смерти, который характеризует вероятность умереть только от оставшихся причин при условии отсутствия смертности от исключенной причины.

Покажем на конкретном примере, как изменится порядок дожития, если исключить какое-либо заболевание из совокупности причин смерти. Предположим, что развитие медицины привело к полному забвению смертности от злокачественных новообразований. Рассмотрим, как изменился бы порядок вымирания мужского населения Англии и Уэльса в 1963 г., исходя из предположения о полном устранении смертности от новообразований.

Мы предполагаем, что вероятности независимы, т. е. что устранение смертности от какой-либо одной причины не влияет на вероятности умереть от всех остальных причин. Такое допущение, правда, не совсем соответствует истине, так как заболевание, ведущее к летальному исходу, может осложняться наличием еще одной или нескольких сопутствующих болезней, которые могут послужить причиной смерти при устранении основной причины.

С другой стороны, возможно, что некоторые болезни как бы производят определенный отбор (в первую очередь от них умирают более слабые индивидуумы) и часть случившихся ранее смертей при условии ликвидации таких болезней, видимо, пришлась бы на другие причины, несколько увеличив смертность от них. Однако практически учесть множественную диагностику причин смерти не представляется возможным, и надо полагать, что погрешность, связанная с неучетом такой взаимосвязи, крайне невелика.

[6] См., например: *Ю. А. Корчак-Чепурковский.* Избранные демографические исследования. М., «Статистика», 1970, с. 186—202; *А. М. Мерков.* Влияние злокачественных новообразований на сокращение средней продолжительности жизни населения Украины. — «Вопросы онкологии», т. 10, № 2; *Р. Н. Бирюкова.* Таблицы смертности по причинам смерти. — В сб. «Проблемы демографической статистики». М., Госстатиздат, 1959; *М. С. Бедный.* Продолжительность жизни.

Итак, требуется найти повозрастные вероятности умереть от различных причин после того, как одна из действовавших причин устранена. Если для простоты рассматривать только две вероятности: q_{xi} — вероятность умереть от i-й причины и q_{xj} — вероятность умереть от всех остальных причин, то требуется найти q_{xj} при условии, что $q_{xi}=0$.

Казалось бы, что простым вычитанием вероятности умереть от той причины, которую мы хотим исключить, из общей вероятности можно непосредственно перейти к новой вероятности смерти уже без действия данной причины. Иначе говоря, на первый взгляд

$$q_{xj}=q_x-q_{xi}. \tag{3}$$

Но вероятность умереть (q_x) — это показатель, который, как известно, отражает уровень смертности в течение года или, вернее, на протяжении интервала возраста от x до $x+1$, а в нашем случае в интервале возраста x, $x+4$. Следовательно, в случае простого вычитания вероятностей, или же чисел умерших, что одно и то же, умиравшие ранее от причины, которую мы хотим исключить, остаются бессмертными на протяжении предстоящего года или пяти лет жизни и полностью переходят в следующую возрастную группу. На самом же деле эти лица наравне со всеми имеют шанс умереть в этом интервале от всех оставшихся причин и лишь часть из них доживет до следующего возраста.

Таким образом, при условии устранения некоторой причины вероятность умереть от всех остальных причин не остается неизменной, а увеличивается, поскольку увеличивается общее число смертей от оставшихся причин, а это противоречит предположению о независимости вероятностей.

Допущение о неизменности вероятности умереть при условии исключения смертности от какой-либо причины возможно лишь в том случае, когда мы рассматриваем вероятность умереть на протяжении бесконечно малого интервала возраста. Такая вероятность называется силой смертности и обозначается $\mu(x)$. Только в этом случае возможно допущение о том, что устранение силы смертности от какого-либо из заболеваний не влечет за собой изменения сил смертности от всех оставшихся причин.

Каждой причине соответствует своя сила смертности — вероятность умереть от этой причины на бесконечно малом отрезке времени. Общая же сила смертности складывается из сил смертности от отдельных причин, в нашем случае от двух причин:

$$\mu_x = \mu_{xi} + \mu_{xj} . \tag{4}$$

Как известно, вероятность умереть может быть выражена через силу смертности:

$$q_x = 1 - e^{-\mu_x} . \tag{5}$$

С учетом формулы (4) получим

$$1 - q_x = e^{-\mu_{xi} - \mu_{xj}} . \tag{6}$$

Логарифмируя, получаем

$$\ln(1 - q_x) = -\mu_{xi} - \mu_{xj} . \tag{7}$$

Так как $-\mu_{xi} = \ln(1 - q_{xi})$ и $-\mu_{xj} = \ln(1 - q_{xj})$, имеем

$$\ln(1 - q_x) = \ln[(1 - q_{xi})(1 - q_{xj})], \tag{8}$$

откуда

$$1 - q_x = (1 - q_{xi})(1 - q_{xj}), \tag{9}$$

что после перемножения дает

$$q_x = q_{xi} + q_{xj} - q_{xi} q_{xj} . \tag{10}$$

Таким образом, при условии независимости вероятностей верно равенство (10) и неверно равенство (3), что исключает возможность получения интересующих нас вероятностей умереть после исключения какой-либо причины смерти простым вычитанием вероятностей.

К нахождению новых вероятностей умереть можно было бы подойти и путем следующего грубого рассуждения. Вероятность умереть от j-й причины в возрасте x равна отношению числа смертных случаев от этой причины (d_{xj}) к числу доживших до возраста x (l_x). Как бы ни был мал наблюдаемый отрезок времени, при условии независимого действия на совокупность доживших двух причин смерти от j-й причины могут умирать не все дожившие до возраста x, а те из них, кто не умер раньше

от i-й причины. Если предположить, что число смертей от каждой причины распределяется пропорционально времени наблюдения, то при действии двух причин имеется вероятность, равная 0,5, что смерти от i-й причины произойдут раньше, чем смерти от j-й причины, так что j-я причина будет воздействовать не на совокупность l_x, а на совокупность $l_x - 0{,}5\ d_{xi}$, вследствие чего

$$q_{xj} = \frac{d_{xj}}{l_x - 0{,}5 d_{xi}} . \tag{11}$$

К этому же выводу можно прийти более строгим путем. Рассмотрим отношение

$$w_{xj} = \frac{\mu_{xj}}{\mu_x}, \tag{12}$$

характеризующее долю всех причин, кроме i-й, в общем числе смертей, так как доля каждой причины пропорциональна силе смерти в интервале возраста. Можно записать:

$$\mu_x = \mu_{xj} \frac{\mu_x}{\mu_{xj}} = \frac{\mu_{xj}}{w_{xj}} . \tag{13}$$

Тогда, подставляя формулу (13) в формулу (5), получаем

$$1 - q_x = e^{-\frac{\mu_{xj}}{w_{xj}}}, \tag{14}$$

откуда

$$(1 - q_x)^{w_{xj}} = e^{-\mu_{xj}}, \tag{15}$$

а так как аналогично формуле (5)

$$q_{xj} = 1 - e^{-\mu_{xj}}, \tag{16}$$

то справедливо равенство

$$q_{xj} = 1 - (1 - q_x)^{w_{xj}}, \tag{17}$$

где q_{xj} — вероятность умереть от всех причин, кроме i-й, которая исключается.

Для практических расчетов выражение (17) можно упростить.

Разложим величину $(1 - q_x)^{w_{xj}}$ в биномиальный ряд:

$$q_{xj} = 1 - [1 - q_x w_{xj} + \frac{w_{xj}(w_{xj} - 1)}{2!} q_x^2 -$$

$$-\frac{w_{xj}(w_{xj}-1)(w_{xj}-2)}{3!}q_x^3\Bigg] . \qquad (18)$$

Пренебрегая членами ряда, содержащими q_x в степени выше второй, имеем:

$$q_{xj}=q_x w_{xj}-\frac{w_{xj}(w_{xj}-1)}{2!}q_x^2=$$

$$=q_x w_{xj}\left(1+\frac{1-w_{xj}}{2}q_x\right). \qquad (19)$$

Дополнив это выражение до разности квадратов и разделив на соответствующее выражение, получим

$$q_{xj}=\frac{q_x w_{xj}}{1-\frac{1}{2}(1-w_{xj})q_x}-\frac{(1-w_{xj})^2 w_{xj} q_x^3}{4[1-\frac{1}{2}(1-w_{xj})q_x]}. \qquad (20)$$

Вторым членом, содержащим q_x в 3-й степени, можно пренебречь; тогда остается формула

$$q_{xj}=\frac{q_x w_{xj}}{1-\frac{1}{2}(1-w_{xj})q_x}. \qquad (21)$$

Умножив числитель и знаменатель первой части равенства на l_x, получим

$$q_{xj}=\frac{d_x w_{xj}}{l_x-\frac{1}{2}(1-w_{xj})d_x}, \qquad (22)$$

что тождественно выражению (11) и может быть аналогичным образом интерпретировано.

Формула (22) проще формулы (11), для расчетов по которой надо выполнять логарифмирование. Но ею можно пользоваться лишь в том случае, когда повозрастные показатели смертности относительно невелики и доля исключенной причины незначительна. При смертности выше 100‰ ошибка становится равной 0,0001 и быстро увеличивается с увеличением смертности. Так, вероятность умереть в возрасте 80—84 года, рассчитанная по формуле (21) или (22), равна 0,56071 против величины 0,54764, вычисленной на основании равенства (11).

Гипотетическую таблицу можно строить исходя из показателей обычной (базовой) таблицы смертности, в частности исходя из базовых вероятностей умереть. Но

этот путь совсем не обязателен, можно опираться непосредственно на повозрастные коэффициенты смертности, на основе которых строится обычная таблица.

Действительно, μ_x есть не что иное, как средняя величина силы смертности (μ_x) в интервале x, $x+1$. Если учесть, что в рамках одногодичного возрастного интервала числа умерших (d_x) изменяются незначительно, среднюю силу смертности с полным основанием можно приравнять к табличному коэффициенту смертности, который, как известно, равен числу умерших, отнесенному к числу живущих в этом же возрастном интервале, или приближенно $\frac{d_x}{{}^1\!/_2\,(l_x+l_{x+1})}$.

Табличный же коэффициент смертности, пренебрегая тем, что внутри одногодичной возрастной группы возрастное распределение умерших может не совпадать с непрерывным изменением числа доживающих, приравнивается к обычному статистическому коэффициенту смертности m_x, который обычно и служит исходным показателем для построения таблиц доживаемости. Следовательно, исходя из равенства (12), зная истинные повозрастные коэффициенты смертности данного населения и долю изучаемой причины в общем числе смертей, легко получить новый коэффициент смертности при условии устранения действия этой причины. Этим приемом, в частности, пользовался М. С. Бедный при определении влияния смертности от отдельных причин на снижение средней продолжительности жизни населения г. Днепропетровска за период 1939—1959 гг.[7]

Вернемся к нашему числовому примеру. Прологарифмировав выражение (17), легко перейти к новым вероятностям умереть, которые отражают процесс смертности уже при отсутствии такого опасного заболевания, как злокачественные новообразования.

На основе вновь полученных вероятностей рассчитаем все остальные функции таблиц, необходимые для вычисления средней величины предстоящей жизни (см. табл. 3 приложения). Из таблицы видно, что средняя продолжительность жизни мужчин увеличилась с 67,9 до 70,4 года, иначе говоря смертность от злокачественных новообразований укорачивала продолжительность жиз-

[7] *М. С. Бедный.* Продолжительность жизни, с. 127—128.

ни на 2,5 года. Сравнив данные табл. 1 и 3 приложения, заметим, что при простом вычитании вероятностей смертность в возрасте, например, 75—79 лет составила бы 361,3 на 1000 (428,6—67,3), тогда как на самом деле смертность в этом возрасте при условии устранения злокачественных заболеваний оказывается равной 376,1 на 1000 человек.

Вычислив вероятность смерти при условии устранения смертности от какой-либо причины, можно не только рассчитать все остальные функции таблиц, но и проследить, как устранение этой причины повлияло на смертность от каждой из оставшихся групп причин.

Прежде всего отметим, что с устранением смертей от какой-то причины доли остальных, видимо, должны измениться. До исключения смертности от новообразований доля каждой из групп причин была равна:

$$w_{xi}=\frac{\mu_{xi}}{\mu_x},$$

где μ_{xi} — сила смертности от любой из групп причин.

Условное устранение смертности от злокачественных новообразований, естественно, влияет на величину общей повозрастной смертности. Общая сила смертности становится меньше на величину силы смертности от новообразований, силы же смертности от всех остальных групп причин остаются неизменными. Следовательно, изменяется удельный вес каждой из оставшихся групп причин:

$$w'_{xi}=\frac{\mu_{xi}}{\mu_x-\mu_{x(\mathrm{II})}},$$

где w'_{xi} — доля любой из групп причин при условии устранения смертности от злокачественных новообразований. Разделив числитель и знаменатель правой части равенства на μ_x, получим удобную формулу для вычисления новых удельных весов оставшихся причин:

$$w'_{xi}=\frac{w_{xi}}{1-w_{x(\mathrm{II})}}. \tag{23}$$

Сумма долей всех причин, даже при условии устранения одной или нескольких, имевших место ранее, как известно, должна составлять единицу. В самом деле:

$$\sum_{i=1}^{n} w'_{xi}=\sum_{i=1}^{n}\frac{w_{xi}}{1-w_{x(\mathrm{II})}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} w_{xi}}{1-w_{x(\mathrm{II})}}=$$

$$=\frac{1-w_{x(\mathrm{II})}}{1-w_{x(\mathrm{II})}}=1.$$

Зная новую вероятность умереть, а также вновь получив распределение причин по их удельному весу по формуле (23), как и в первом случае, найдем частные вероятности смерти от оставшихся групп причин в каждой возрастной группе. Эти вероятности приведены в табл. 3 приложения. В ней же приведены соответствующие числа смертных случаев в каждой возрастной группе от каждой из групп причин (после исключения смертных случаев от рака), которые позволяют вычислить новый средний возраст смерти от каждой группы причин. Общие вероятности умереть и средний возраст смерти от оставшихся причин сведены в табл. 2.

Таблица 2

Вероятность умереть (Q 1000) на протяжении всей жизни и средний возраст смерти от различных причин до и после устранения смертности от злокачественных новообразований (Англия и Уэльс, 1963 г., мужчины)

Причины смерти	Вероятность умереть (Q 1000)		Средний возраст смерти ($\bar{x}_i$)	
	до исключения смертности от злокачественных новообразований	после исключения смертности от злокачественных новообразований	до исключения смертности от злокачественных новообразований	после исключения смертности от злокачественных новообразований
Инфекционные заболевания	12,79	14,26	51,5	54,0
Злокачественные новообразования	187,12	—	66,8	—
Сердечно-сосудистые заболевания	494,15	615,69	72,2	73,9
Все виды несчастных случаев	38,75	42,74	42,1	45,7
Прочие причины смерти	267,19	327,31	66,5	69,2
Все причины	1000	1000	68,2	70,8

Первый и третий столбцы этой таблицы те же, что и в табл. 1, второй и четвертый получены из табл. 3 приложения. Здесь имеется то же расхождение между значениями e_0^0, которое отмечалось при рассмотрении табл. 1.

Как следует из таблицы, все вероятности умереть от различных групп причин изменились, но отнюдь не в одинаковой степени. Так, вероятность умереть от сердечно-сосудистых заболеваний увеличилась на 24,6%, тогда как вероятность умереть от инфекционных заболеваний — всего на 14,4%. Объяснение этому явлению следует искать в том, что устраняемая смертность от злокачественных новообразований играет существенную роль лишь в старших возрастах (после 40—50 лет). В силу этого ее устранение приводит к тому, что лица, не умершие от рака, в наибольшей степени подвергаются риску умереть от тех причин, которые особенно сильно действуют в старших возрастах (это относится, в частности, к сердечно-сосудистым заболеваниям), и в меньшей степени рискуют умереть от причин, действие которых значительно в младших возрастах (например, инфекционные заболевания).

Однако новое распределение вероятностей умереть от оставшихся причин является не единственным следствием устранения смертности от злокачественных новообразований. Если бы изменились только вероятности смерти от различных причин, то средняя продолжительность жизни составила бы 68,75 года, т. е. увеличилась бы всего на 0,55 года.

Одновременно с изменением вероятностей умереть изменился и табличный средний возраст смерти от каждой из групп причин, причем эти изменения для каждой группы причин также не были одинаковыми. Наиболее существенно повысился средний возраст смерти от тех причин, смертные случаи от которых распределялись между всеми возрастами наиболее равномерно, так что табличный средний возраст смерти здесь был наиболее низким. Так, средний возраст смерти от несчастных случаев, который был равен 42,1 года, повысился на 8,5%. Там же, где подавляющее большинство смертных случаев концентрировалось в старших возрастах, в силу чего средний возраст смерти был достаточно высоким, его увеличение было незначительным (средний возраст смерти от сердечно-сосудистых заболеваний составлял 72,2 года и повысился всего немногим более чем на 2%).

В целом же именно повышение среднего возраста смерти от каждой группы причин является главным фактором увеличения средней продолжительности жизни. Если бы даже вероятности умереть от каждой из причин не изменились после устранения смертности от рака, то лишь за счет изменений среднего возраста смерти от каждой причины средняя продолжительность жизни увеличилась бы на 2,05 года, что составляет 79% ее увеличения за счет одновременного действия обоих факторов.

Очевидно, что при прочих равных условиях общее удлинение средней продолжительности жизни будет тем большим, чем ниже средний возраст смерти от устраняемой причины. В частности, можно предположить, что, несмотря на то что вероятность умереть от всех видов несчастных случаев почти в 5 раз меньше, чем вероятность умереть от злокачественных новообразований, благодаря тому, что средний возраст смерти от первой причины на 30 лет меньше, чем от второй, ее устранение принесет эффект отнюдь не в 5 раз меньший, чем устранение смертности от рака. Гипотетические таблицы смертности (и только они) позволяют проверить это предположение. Действительно, если устранение смертности от злокачественных новообразований увеличило бы среднюю продолжительность жизни на 2,6 года, то ее увеличение в результате устранения смертности от несчастных случаев составило бы 1,3 года, т. е. было бы всего в 2 раза меньше.

Таким образом, гипотетические таблицы смертности, построенные исходя из предположения об исключении какой-либо причины смерти и затем дифференцированные по оставшимся причинам, существенно расширяют круг показателей, характеризующих смертность, и их построение является непременным условием углубленного анализа влияния различных причин и борьбы с ними на динамику смертности и средней продолжительности жизни населения.

Таблица 1

Таблица смертности и средней продолжительности жизни, дифференцированная по причинам смерти (мужское население Англии и Уэльса, 1963 г.)

Возраст	l_x	p_x	q_x	q_{xi} i=I	i=II	i=III	i=IV	i=V	d_x	d_{xi} i=I	i=II	i=III	i=IV	i=V	L_x	T_x	$\overset{\circ}{e}_x$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0—4	100 000	0,97250	0,02750	0,00245	0,00052	0,00044	0,00729	0,01680	2 750	245	52	44	729	1 680	493 125	6 789 996	67,9
5—9	97 250	0,99764	0,00236	0,00009	0,00044	0,00006	0,00093	0,00084	230	9	43	6	90	82	485 675	6 296 871	64,7
10—14	97 020	0,99794	0,00206	0,00004	0,00032	0,00007	0,00081	0,00081	200	4	31	7	79	79	484 600	5 811 196	59,9
15—19	96 820	0,99556	0,00444	0,00007	0,00042	0,00021	0,00260	0,00114	430	7	41	20	252	110	483 025	5 326 596	55,0
20—24	96 390	0,99450	0,00550	0,00005	0,00061	0,00039	0,00280	0,00165	530	5	59	38	270	158	480 625	4 843 571	50,2
25—29	95 860	0,99510	0,00490	0,00010	0,00067	0,00066	0,00186	0,00162	470	10	64	63	178	155	478 125	4 362 946	45,5
30—34	95 390	0,99392	0,00608	0,00010	0,00112	0,00129	0,00154	0,00203	580	9	107	123	147	194	475 500	3 884 821	40,7
35—39	94 810	0,99103	0,00897	0,00029	0,00176	0,00287	0,00150	0,00255	850	27	167	272	142	242	471 925	3 409 321	36,0
40—44	93 960	0,98542	0,01458	0,00044	0,00303	0,00594	0,00147	0,00370	1 370	41	285	558	138	348	466 375	2 937 396	31,3
45—49	92 590	0,97267	0,02733	0,00066	0,00700	0,01190	0,00170	0,00607	2 530	61	648	1 102	157	562	456 625	2 471 021	26,7
50—54	90 060	0,95370	0,04630	0,00083	0,01274	0,02120	0,00185	0,00968	4 170	75	1 147	1 909	167	872	439 875	2 014 396	22,4
55—59	85 890	0,91815	0,08185	0,00122	0,02275	0,03765	0,00238	0,01785	7 030	105	1 954	3 234	204	1 533	411 875	1 574 521	18,3
60—64	78 860	0,86546	0,13454	0,00189	0,03525	0,06282	0,00269	0,03189	10 610	149	2 780	4 954	212	2 515	367 775	1 162 646	14,7
65—69	68 250	0,79531	0,20469	0,00267	0,04974	0,10048	0,00267	0,04913	13 970	182	3 395	6 858	182	3 353	306 325	794 871	11,7
70—74	54 280	0,70063	0,29937	0,00269	0,05929	0,15748	0,00420	0,07572	16 250	146	3 218	8 548	228	4 110	230 775	488 546	9,0
75—79	38 030	0,57139	0,42861	0,00300	0,06729	0,23616	0,00684	0,11532	16 300	114	2 559	8 981	260	4 386	149 400	257 771	6,8
80—84	21 730	0,40773	0,59227	0,00295	0,06931	0,34174	0,01128	0,16700	12 870	64	1 506	7 426	245	3 629	76 475	108 371	5,0
85 и старше	8 860	0,00000	1,00000	0,00294	0,07404	0,59503	0,02201	0,30598	8 860	26	656	5 272	195	2 711	31 896	31 896	3,6
Всего	—	—	1,00000	0,01279	0,18712	0,49415	0,03875	0,26719	100 000	1 279	18 712	49 415	3 875	26 719	—	—	—

Таблица 2

Таблица смертности и средней продолжительности жизни, дифференцированная по причинам смерти (женское население Англии и Уэльса, 1963 г.)

Возраст	l_x	p_x	q_x	q_{xi} i=I	q_{xi} i=II	q_{xi} i=III	q_{xi} i=IV	q_{xi} i=V	d_x	d_{xi} i=I	d_{xi} i=II	d_{xi} i=III	d_{xi} i=IV	d_{xi} i=V	L_x	T_x	$\overset{\circ}{e}_x$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0—4	100 000	0,97840	0,02160	0,00156	0,00037	0,00032	0,00484	0,01451	2 160	156	37	32	484	1 451	494 600	7 387 470	73,8
5—9	97 840	0,99836	0,00164	0,00009	0,00031	0,00003	0,00042	0,00079	160	9	30	3	41	77	488 800	6 892 870	70,4
10—14	97 680	0,99877	0,00123	0,00005	0,00027	0,00006	0,00025	0,00060	120	5	26	6	24	59	488 100	6 404 070	65,6
15—19	97 560	0,99826	0,00174	0,00005	0,00030	0,00014	0,00043	0,00082	170	5	29	14	42	80	487 375	5 915 970	60,6
20—25	97 390	0,99774	0,00226	0,00006	0,00038	0,00030	0,00039	0,00113	220	6	37	29	38	110	486 400	5 428 592	55,7
26—29	97 170	0,99702	0,00298	0,00010	0,00066	0,00045	0,00034	0,00143	290	10	64	44	33	139	485 125	4 942 195	50,9
30—34	96 880	0,99566	0,00434	0,00018	0,00117	0,00082	0,00032	0,00185	420	17	113	79	31	180	483 350	4 457 070	46,0
35—39	96 460	0,99305	0,00695	0,00021	0,00244	0,00140	0,00038	0,00252	670	20	235	135	37	243	480 625	3 973 720	41,2
40—44	95 790	0,98925	0,01075	0,00028	0,00439	0,00255	0,00046	0,00307	1 030	27	420	244	44	295	476 375	3 493 095	36,5
45—49	94 760	0,98206	0,01794	0,00029	0,00775	0,00494	0,00059	0,00438	1 700	27	734	468	56	415	469 550	3 016 720	31,8
50—54	93 060	0,97378	0,02622	0,00040	0,01098	0,00829	0,00071	0,00584	2 440	37	1 022	771	66	544	459 200	2 547 170	27,4
55—59	90 620	0,95939	0,04061	0,00036	0,01482	0,01547	0,00097	0,00899	3 680	33	1 343	1 403	88	813	443 900	2 087 970	23,0
60—64	86 940	0,93359	0,06648	0,00053	0,02001	0,03018	0,00146	0,01430	5 780	46	1 740	2 624	127	1 243	420 250	1 644 070	18,9
65—69	81 160	0,89108	0,10892	0,00065	0,02538	0,05784	0,00218	0,02287	8 840	53	2 060	4 694	177	1 856	383 700	1 223 820	15,1
70—74	72 320	0,81748	0,18252	0,00073	0,03103	0,10878	0,00383	0,03816	13 200	53	2 244	7 867	277	2 759	328 600	840 120	11,6
75—79	59 120	0,70331	0,29669	0,00118	0,03887	0,18632	0,00712	0,06319	17 540	70	2 298	11 015	421	3 736	251 750	511 520	8,7
80—84	41 580	0,53535	0,46465	0,00094	0,04601	0,30108	0,01301	0,10361	19 320	39	1 913	12 519	541	4 308	159 600	259 770	6,2
85 и старше	22 260	0,00000	1,00000	0,00200	0,06200	0,65200	0,03000	0,25400	22 260	45	1 380	14 513	668	5 654	100 170	100 170	4,5
Всего	—	—	1,00000	0,00658	0,15725	0,56460	0,03195	0,23962	100 000	658	15 725	56 460	3 195	23 962	—	—	—

Таблица 3

Таблица смертности и средней продолжительности жизни, дифференцированная по причинам смерти, при условии исключения смертности от злокачественных новообразований (мужское население Англии и Уэльса, 1963 г.)

Возраст	l_x	p_x	q_x	q_{xi}, i=I	q_{xi}, i=III	q_{xi}, i=IV	q_{xi}, i=V	d_x	d_{xi}, i=I	d_{xi}, i=III	d_{xi}, i=IV	d_{xi}, i=V	L_x	T_x	$\overset{o}{e}_x$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0—4	100 000	0,97302	0,02698	0,00245	0,00044	0,00729	0,01680	2 698	245	44	729	1 680	493 255	7 036 741	70,4
5—9	97 302	0,99808	0,00192	0,00009	0,00006	0,00093	0,00084	186	9	6	90	81	486 045	6 543 486	67,2
10—14	97 116	0,99826	0,00174	0,00004	0,00007	0,00081	0,00081	168	4	7	78	79	485 160	6 057 441	62,4
15—19	96 948	0,99598	0,00402	0,00007	0,00021	0,00260	0,00114	389	7	20	252	110	483 767	5 572 281	57,5
20—24	96 559	0,99512	0,00488	0,00005	0,00039	0,00280	0,00164	471	5	38	271	157	481 617	5 088 514	52,7
25—29	96 088	0,99577	0,00423	0,00010	0,00066	0,00186	0,00161	406	10	63	178	155	479 425	4 606 896	47,9
30—34	95 682	0,99504	0,00496	0,00009	0,00129	0,00154	0,00204	474	9	123	147	195	478 410	4 127 471	43,1
35—39	95 208	0,99279	0,00721	0,00028	0,00287	0,00150	0,00255	686	27	273	143	243	474 325	3 649 061	38,3
40—44	94 522	0,98844	0,01156	0,00043	0,00595	0,00595	0,00347	1 093	41	562	139	351	469 877	3 174 736	33,6
45—49	93 429	0,97960	0,02040	0,00065	0,01196	0,00170	0,00609	1 906	61	1 117	159	569	462 380	2 704 859	29,0
50—54	91 523	0,96622	0,03378	0,00084	0,02133	0,00187	0,00974	3 091	77	1 952	171	891	449 887	2 242 479	24,5
55—59	88 432	0,94021	0,05979	0,00124	0,03809	0,00240	0,01805	5 287	110	3 369	212	1 596	428 942	1 792 591	20,3
60—64	83 145	0,89886	0,10114	0,00192	0,06400	0,00274	0,03247	8 409	160	5 321	228	2 700	394 202	1 363 649	16,4
65—69	74 736	0,84083	0,15917	0,00273	0,10324	0,00273	0,05047	11 896	204	7 716	204	3 772	343 440	969 446	13,0
70—74	62 840	0,75177	0,24823	0,00279	0,16279	0,00433	0,07831	15 598	175	10 230	272	4 921	275 205	626 006	10,0
75—79	47 242	0,62387	0,37613	0,00313	0,24584	0,00713	0,12002	17 769	148	11 614	337	5 670	191 787	350 601	7,4
80—84	29 473	0,45236	0,54764	0,00309	0,35787	0,01177	0,17491	16 140	91	10 547	347	5 155	107 015	159 014	5,4
85 и старше	13 333	0,00000	1,00000	0,00323	0,64253	0,02378	0,33046	13 333	43	8 567	317	4 406	51 999	51 999	3,9
Всего	—	—	1,00000	0,01426	0,61569	0,04274	0,32731	100 000	1 426	61 569	4 274	32 731	—	—	—

Примечания:

1. Числа доживающих (l_x) взяты из «The registrar general's statistical review of England and Wales for the year 1963, part I» (London, 1965). Оттуда же взяты данные о средней продолжительности жизни в возрасте 85 лет (e^0_{85}) для вычисления чисел живущих в этом возрасте и старше.

2. Для отдельных групп причин смерти приняты следующие обозначения:

I — инфекционные заболевания;
II — злокачественные новообразования;
III — сердечно-сосудистые заболевания;
IV — все виды несчастных случаев;
V — прочие причины смерти.

3. Числа живущих (L_x), сумма лет жизни от x лет и старше (T_x), средняя продолжительность предстоящей жизни ($\overset{o}{e}_x$) вычислялись по общепринятым формулам:

$$L_x = \frac{1}{2}\left(l_x + l_{x+1}\right); \quad T_x = \sum_{x}^{\omega} L_x; \quad \overset{o}{e}_x = \frac{T_x}{l_x}.$$

5. Заказ 2893.

А. Г. ВИШНЕВСКИЙ

НАСЕЛЕНИЕ И ПРОИЗВОДСТВО

1. Вводные замечания

В последние годы в нашей стране получили заметное развитие исследования связей между экономикой и населением. Двусторонний характер этих связей обусловил два основных направления исследований. С одной стороны, имеются экономико-демографические работы, посвященные изучению влияния социально-экономических факторов на воспроизводство населения, демографическое поведение и т. п. С другой стороны, в ряде работ рассматриваются проблемы, иногда называемые демоэкономическими и связанные с воздействием демографических факторов (численности населения, его структуры, темпа его роста и т. п.) на экономику.

Из двух отмеченных направлений второе, демоэкономическое, пока привлекает значительно меньшее число исследователей. В литературе последних лет имеется несколько статей, посвященных демоэкономическим проблемам[1]. Ряд важных демоэкономических вопросов освещен в недавно вышедшей коллективной монографии[2].

В целом, однако, демоэкономические процессы изучены меньше, чем они того заслуживают, что, возможно, отражает некоторую недооценку влияния, оказываемого демографическим фактором на экономическое развитие. Воздействие изменений в режиме воспроизводства населения на экономическую жизнь страны часто воспринимается упрощенно, только сквозь призму непосредственных и очевидных последствий: динамики численности трудовых ресурсов или определенных контингентов потребителей. Однако существуют последствия менее явные, хотя, возможно, не менее серьезные. Нащупать и оценить эти последствия значительно труднее, но сделать это необходимо, потому что научное управление социалистической экономикой предъявляет все бо́льшие требования к нашим знаниям обо всех факторах, влияющих на экономическое развитие. Настоящая статья и представляет собой попытку рассмотреть некоторые из таких менее очевидных влияний, оказываемых демографическим фактором на экономику.

В реальной действительности экономико-демографические и демоэкономические процессы разворачиваются одновременно, тесно переплетаются между собой, образуя непрерывную цепь причинно-следственных связей. Их разделение на две самостоятельные группы носит, конечно, условный характер и может быть оправдано только целями теоретического анализа, который сам есть шаг к теоретическому синтезу, дающему адекватное описание действительности во всем ее многообразии.

То же самое следует сказать о взаимоотношении демоэкономических процессов с процессами воздействия демографических факторов на неэкономические области (демосоциологическими и т. п.). Демографическое развитие влияет на все области жизни людей, затрагивает их имущественное и правовое положение, биологическое и социальное окружение, область этики и религии, состояние здоровья, принципы воспитания и образования и т. п. Экономические последствия стоят в ряду большого числа других последствий демографических процессов и могут оцениваться изолированно только на определенной стадии анализа, который, однако, неизбежно должен предшествовать синтезу.

Потребность в такой аналитической стадии и диктует необходимость выделения демоэкономических процессов в качестве самостоятельного объекта исследования.

В настоящей статье рассматривается только одна сторона демоэкономического взаимодействия — влияние

[1] *А. Я. Боярский.* К проблеме демографического оптимума. — В сб. «Изучение воспроизводства населения». М., «Наука», 1968; *Б. Ц. Урланис.* Проблемы экономической демографии. — В сб. «Проблемы демографии». М., «Статистика», 1971; *Н. В. Панкратьева.* Демографический фактор роста национального дохода и его распределения на фонды потребления и накопления. — В кн. «Факторы экономического развития СССР». М., «Экономика», 1970, гл. VIII.

[2] «Марксистско-ленинская теория народонаселения». М., «Мысль», 1971.

демографических процессов на результаты собственно производства. Проблемы влияния демографических факторов на процессы накопления и потребления, которые в единстве с процессом производства обеспечивают непрерывную возобновляемость и расширение всего общественного производства, остаются за рамками статьи.

Развитие производства происходит под влиянием большого числа факторов, среди которых демографический фактор едва ли занимает первостепенное положение, хотя он и не так незначителен, чтобы им можно было пренебречь. Выделить действие демографического фактора среди всех прочих при статистическом анализе факторов, влияющих на рост производства, вообще очень сложно, а при том состоянии теории, которое мы имеем сейчас, особенно трудно, потому что многие важные вопросы, относящиеся к изучению демоэкономических процессов, и не ставились перед статистикой.

Поэтому главным направлением настоящего исследования является логический анализ механизма демоэкономического взаимодействия и его математическое моделирование.

Рассматриваемые ниже модели описывают взаимодействие экономических (в какой-то мере и экономико-социологических) и демографических переменных. При этом в качестве экзогенных, внешних по отношению к модели, независимых от других факторов, рассматриваются только демографические переменные. Экономические же переменные, эндогенные, вообще говоря, зависят от поведения экзогенных факторов. Больше того, предполагается, что они зависят только от них. Это означает последовательное проведение принципа «ceteris paribus» в отношении поведения экономических переменных: все время исследуется, как они изменяются под влиянием изменения демографических переменных *при прочих равных условиях*.

Такая однонаправленность моделей является, конечно, их слабостью, простительной, как уже говорилось, только на определенном этапе анализа, к которому и относится эта статья.

Принцип экзогенности демографических переменных предполагает принятие с самого начала какой-то гипотезы в отношении их изменения, независимого от рассматриваемых моделей.

Роль такой гипотезы мог бы играть, например, какой-нибудь конкретный многовариантный прогноз динамики населения на более или менее длительный срок для какой-то определенной территории.

Однако для наших целей более удобна теоретическая модель населения, развивающегося на основе определенных гипотетических закономерностей. Мы используем здесь известную модель стабильного населения. При неизменной смертности численность и возрастная структура такого населения полностью определяются одним параметром — истинным коэффициентом естественного прироста (коэффициентом Лотки) r.

Если $l(x)$ — не зависящая от времени функция дожития до возраста x, а $Be^{r(t-x)}$ — общее число родившихся x лет назад, то в момент t число всех живущих в возрасте x составит

$$P(t, x) = B\, e^{r(t-x)}\, l(x); \tag{1}$$

численность всего населения

$$P(t) = B\, e^{rt} \int_0^{\omega} e^{-rx}\, l(x)\, dx; \tag{2}$$

доля населения в возрасте x во всем населении

$$C(x) = \frac{Be^{r(t-x)}\, l(x)}{Be^{rt} \int_0^{\omega} e^{-rx}\, l(x)\, dx} = \frac{e^{-rx}\, l(x)}{\int_0^{\omega} e^{-rx}\, l(x)\, dx}. \tag{3}$$

Функция возрастной структуры $C(x)$ не зависит от t, но зависит от r, причем характер этой зависимости таков, что изменения $C(r, x)$ в результате уменьшения r можно охарактеризовать как процесс старения населения.

Действительно, дифференцируя выражение (3) по r, получим

$$\frac{\partial C}{\partial r} = C \left[-r + \frac{l'(x)}{l(x)} \right], \tag{4}$$

а учитывая, что $-\dfrac{l'(x)}{l(x)}$ — мгновенный коэффициент смертности, или сила смертности,

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)}, \tag{5}$$

имеем

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -C[r+\mu(x)]. \quad (6)$$

В обычных условиях сила смертности $\mu(x)$ в первые годы жизни уменьшается, достигая некоторого минимума, а затем увеличивается с возрастом. Например, сила смертности населения СССР в 1958—1959 гг.[3]:

$$\begin{aligned}
\mu(0) &= 0{,}04144\\
\mu(1) &= 0{,}08435\\
\mu(5) &= 0{,}00131\\
\mu(10) &= 0{,}00084\\
\mu(11) &= 0{,}00081\\
\mu(12) &= 0{,}00081\\
\mu(13) &= 0{,}00094\\
\mu(20) &= 0{,}00161\\
\mu(30) &= 0{,}00240\\
\mu(40) &= 0{,}00361\\
\mu(50) &= 0{,}00680
\end{aligned}$$

Обозначим возраст, которому соответствует минимальная сила смертности $\mu_{\min}$, через $x_{\min}$. Тогда в точке $x = x_{\min}$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -C[r+\mu(x_{\min})] \quad (7)$$

Если r отрицательно (убывающее население) и по абсолютному значению больше $\mu(x_{\min})$, то выражение в скобках тоже отрицательно, а $\frac{\partial C}{\partial r}$ положительно и остается положительным до тех пор, пока растущее с возрастом $\mu(x)$ не станет больше r, а частная производная $\frac{\partial C}{\partial r}$ не сменит знак с плюса на минус. До этого момента функция $C(r, x)$ будет монотонно возрастающей, начиная с этого момента — монотонно убывающей.

Если же r отрицательно, но по абсолютному значению меньше $\mu(x_{\min})$ или если r положительно, то для интервала изменений x от $x_{\min}$ до $+\infty$ частная производная $\frac{\partial C}{\partial r}$ все время будет отрицательной, а функция

[3] Рассчитано по «Итогам Всесоюзной переписи населения 1959 г. СССР» (М., Госстатиздат, 1962, с. 262—263), по формуле $\mu(x) = \frac{2\,q(x)}{2-q(x)}$, где $q(x)$ — вероятность умереть в возрасте x лет.

$C(r, x)$ — убывающей, причем скорость убывания (крутизна кривой) будет тем больше, чем больше значение r.

На графике (рис. 1) нанесены кривые, соответствующие изменению функции $C(r, x)$ для функции дожития $l(x)$ всего населения СССР в 1958—1959 гг. при разных значениях r. Площадь под каждой кривой, естественно, равна 1 (в силу того, что $\int_0^{\omega} C(r, x)\,dx = 1$), ордината каждой точки на кривой указывает на долю населения в возрасте x (абсцисса точки) во всем населении. Очевидно, что по мере перехода от больших r к меньшим ординаты младших возрастов уменьшаются, а старших увеличиваются, что и означает старение населения.

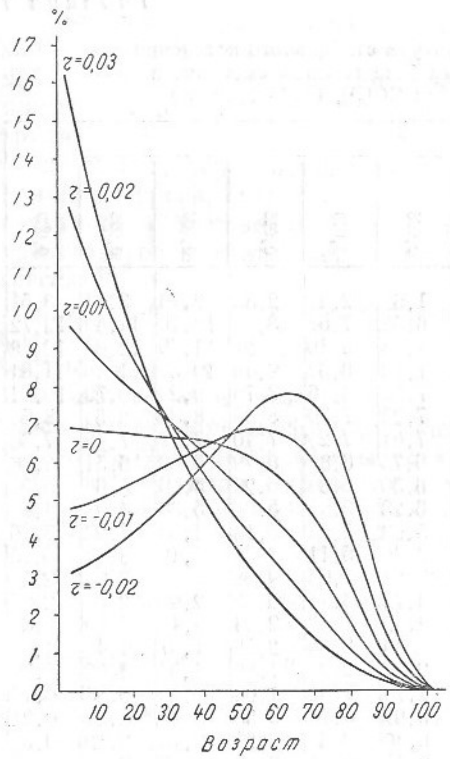

Рис. 1. Возрастная структура стабильного населения при различных значениях r (на базе таблицы смертности населения СССР, 1958—1959 гг.).

Следует обратить внимание на то, что размах этих изменений тем больше, чем больше x отличаются от среднего возраста $\bar{x}$, вблизи которого влияние изменений r на долю соответствующих возрастных групп незначительно[4].

В дальнейшем мы будем часто прибегать к модели стабильного населения и использовать только что указанные его свойства.

[4] *M. Lopin.* Note sur l'étude de la population adulte. — Dans le livre: *L. Buquet.* L'optimum de population. Paris, 1956.

Для иллюстрации мы будем использовать семейство стабильных населений, построенных на базе таблицы смертности всего населения СССР в 1958—1959 гг. для изменений истинного коэффициента естественного прироста в диапазоне от $r=-0{,}010$ до $r=+0{,}030$. Ниже приводится таблица возрастных структур соответствующих стабильных населений; на основе данных таблицы составлен и график на рис. 1.

Таблица 1

Возрастная структура стабильного населения
в процентах (на базе таблицы смертности всего населения СССР, 1958—1959 гг.)

Возрастные группы	r								
	−0,010	−0,005	0	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030
0	0,94	1,16	1,42	1,69	2,01	2,36	2,74	3,11	3,51
1—4	3,78	4,60	5,53	6,55	7,67	8,86	10,10	11,40	12,72
5—9	4,89	5,84	6,86	7,96	9,10	10,27	11,46	12,64	13,78
10—14	5,13	5,95	6,83	7,72	8,62	9,48	10,32	11,10	11,81
15—19	5,36	6,08	6,80	7,50	8,16	8,76	9,29	9,75	10,11
20—24	5,59	6,18	6,75	7,26	7,70	8,06	8,34	8,54	8,64
25—29	5,82	6,28	6,68	7,01	7,25	7,40	7,47	7,46	7,36
30—34	6,06	6,36	6,60	6,75	6,82	6,79	6,68	6,51	6,26
35—39	6,27	6,43	6,51	6,50	6,39	6,22	5,96	5,65	5,32
40—44	6,48	6,59	6,40	6,23	5,98	5,66	5,30	4,91	4,49
45—49	6,66	6,49	6,25	5,93	5,55	5,13	4,69	4,23	3,86
50—54	6,77	6,45	6,05	5,60	5,11	4,61	4,10	3,61	3,15
55—59	6,79	6,30	5,77	5,21	4,64	4,08	3,54	3,04	2,59
60—64	6,65	6,03	5,38	4,73	4,11	3,53	2,99	2,50	2,07
65—69	6,29	5,55	4,84	4,15	3,52	2,94	2,43	1,99	1,61
70—74	5,61	4,81	4,10	3,44	2,84	2,32	1,87	1,48	1,17
75—79	4,56	3,83	3,18	2,59	2,09	1,66	1,31	1,02	0,78
80—84	3,22	2,64	2,13	1,70	1,33	1,03	0,79	0,60	0,45
85—89	1,87	1,46	1,18	0,92	0,70	0,53	0,40	0,29	0,21
90—94	0,89	0,69	0,53	0,40	0,30	0,22	0,16	0,12	0,08
95 и старше	0,37	0,28	0,21	0,15	0,11	0,09	0,06	0,04	0,03
	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
0—19	20,10	23,63	27,44	31,43	35,56	39,73	43,91	48,00	51,93
20—59	50,44	51,08	51,01	50,49	49,44	47,95	46,08	43,96	41,67
60 и старше	29,46	25,29	21,55	18,08	15,00	12,32	10,01	8,04	6,40
	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

2. Демографическое состояние и уровень производства

Изменения в демографической области могут оказывать влияние на совокупные результаты производства тремя способами:

во-первых, через изменение численности и структуры работников;

во-вторых, через изменение эффективности использования производственных ресурсов в результате меняющегося количественного соотношения между ними (например, в результате повышения фондовооруженности труда);

в-третьих, через изменения эффективности использования ресурсов, имеющие качественную природу, не связанные с изменением соотношений между количествами ресурсов (например, влияние технического прогресса).

Изучение влияния происходящих с населением процессов на экономические результаты производства требует применения модели, которая отражала бы основные зависимости между элементами производства и допускала учет влияния демографического фактора. Такой моделью, связывающей «выпуск» (валовой общественный продукт, народный доход и т. п.) с величиной ресурсов и эффективностью их использования, может служить производственная функция.

Мы начнем с рассмотрения простейшей статической одноресурсной производственной функции.

Одноресурсная статическая производственная функция

Если предположить, что все ресурсы, которые общество использует в процессе производства, сводятся к труду и производственным фондам, причем количество труда, измеряемое в данном случае числом работников (L), и количество производственных фондов (G) могут быть различными, но соотношение между ними, т. е. фондовооруженность труда, остается неизменным:

$$g=\frac{G}{L}=\text{const}, \qquad (8)$$

то результаты производства («выпуск») можно выразить в качестве функции от количества любого из этих двух видов ресурсов:

$$Q = f(G) \tag{9}$$

или

$$Q = \varphi(L). \tag{10}$$

Выражения (9) и (10) могут быть следующим образом конкретизированы:

$$Q = bG; \tag{11}$$

$$Q = qL, \tag{12}$$

где q — средняя производительность труда (трудоотдача), а b — фондоотдача.

Пока соотношение (8) остается в силе, можно с одинаковым успехом пользоваться производственной функцией в записи (11) и в записи (12) в зависимости от целей анализа, соображений технического удобства или наличия статистических данных.

В рамках проводимого здесь анализа нас может интересовать влияние демографических переменных как на величину используемых ресурсов (G и L), так и на эффективность их использования (величины q и b), что в конечном счете определяет поведение производственной функции в целом. Если определенным демографическим переменным соответствует более высокая производительность труда, то в силу равенства

$$q = gb, \tag{13}$$

вытекающего из формул (8), (11) и (12), им автоматически соответствует и более высокий коэффициент фондоотдачи. Следовательно, определение наилучших демографических показателей по какому-либо выбранному критерию в рассматриваемом случае вполне обеспечивается применением однoресурсной производственной функции типа (11) или (12).

Введем в производственную функцию демографические переменные, используя в качестве исходной формулу (12).

Пусть, как было условлено выше, P — общая численность населения, $C(x)$ — доля населения, имеющего возраст x ($\int\limits_0^\omega C(x)\,dx = 1$), $\xi(x)$ — коэффициент производственной активности населения в возрасте x. Тогда числа работников в возрасте x

$$L(x) = PC(x)\xi(x) \tag{14}$$

и общее число работников

$$L = \int\limits_0^\omega L(x)\,dx = \int\limits_0^\omega PC(x)\,\xi(x)\,dx\ . \tag{15}$$

Пусть далее $q(x)$ — производительность одного среднего работника в возрасте x. Производительность труда каждого работника зависит всегда, во-первых, от общего уровня развития производительных сил (уровня техники, организационной структуры, размещения и т. п.), а во-вторых, от индивидуальных характеристик работника, не связанных с этим общим уровнем развития (например, различия в физической силе, в способностях и т. п.). Будем рассматривать только те индивидуальные различия, которые вытекают из демографических характеристик работника: пола, возраста, матримониального состояния, числа детей и т. п. Для простоты сведем все различия к одному демографическому фактору — возрасту. Этим нельзя было бы ограничиться, если бы речь шла о рассмотрении действия отдельных конкретных факторов (что будет сделано ниже), но для общего схематического рассуждения этого вполне достаточно.

Выберем какой-нибудь возрастной интервал, например 35—39 лет, и примем производительность труда среднего работника этой возрастной группы за единицу. Если каждой возрастной группе свойственны специфические характеристики производительности труда, то для любой группы (для удобства записи будем рассматривать одногодичные возрастные группы)

$$q(x) = qs(x), \tag{16}$$

где q — производительность труда в возрасте 35—39 лет, а $s(x)$ — повозрастные коэффициенты производительности. Для значений x от 35 до 39 всегда $s(x) = 1$.

В соответствии с формулами (12) и (16) «выпуск» работников, имеющих возраст x, составит

$$Q(x) = qs(x)PC(x)\xi(x), \tag{17}$$

а «выпуск» всех работников будет соответственно

$$Q = qP\int\limits_0^\omega C(x)\xi(x)s(x)\,dx. \tag{18}$$

Если предположить определенную стабильность функции $s(x)$ — устойчивость соотношений между повозрастными уровнями производительности труда, то изменения величины q можно интерпретировать как изменения в уровне общественной производительности труда, не связанные с возрастными различиями.

Перейдем теперь к исследованию того влияния, которое оказывают демографические факторы на значения переменных в правой части выражения (18), а тем самым и на значение производственной функции в целом.

Численность населения и производственная функция

Влияние общей численности населения на число работающих в каждой возрастной группе $L(x)$ и на общее число работающих $L=\int\limits_{0}^{\omega} L(x)dx$ очевидно. При неизменной функции возрастной структуры $C(x)$, неизменном соотношении полов, неизменных повозрастных коэффициентах трудовой активности $\xi(x)$ и при прочих равных условиях численность работников пропорциональна численности населения.

Гораздо более сложен вопрос о влиянии численности населения на среднюю общественную производительность труда, т. е. на величину q. Предположение о том, что такое влияние вообще имеет место, основывается на учете известного эффекта масштаба производства.

Само понятие масштаба производства, особенно когда речь идет обо всем народном хозяйстве, не является достаточно определенным. Его можно охарактеризовать самыми различными показателями: объемом валового или чистого продукта, стоимостью основных фондов, численностью экономически активного населения и даже размером экономически освоенной территории, причем ни одна из подобных характеристик не может быть исчерпывающей. Отсюда затруднения в сравнении масштабов различных экономик, а иногда даже и невозможность или бессмысленность подобных сравнений.

Как сравнить, например, масштабы английской и индийской экономик и каковы аналитические возможности подобных сопоставлений? Совокупный народный доход в Англии значительно выше, чем в Индии, а численность

экономически активного населения значительно ниже. Что можно сказать о сравнительных масштабах этих двух экономик?

Однако в рассматриваемом нами гипотетическом случае положение значительно проще. Так как нас интересует влияние численности населения при *прочих равных условиях*, масштаб производства полностью характеризуется именно численностью населения или зависящей от нее численностью работников L. Иначе говоря, здесь еще остаются вне поля зрения такие факторы, как наличие для этой численности соответствующих средств производства, а в капиталистических условиях — спроса на продукцию и саму рабочую силу.

Как в этих условиях изменение масштаба производства влияет на общественную производительность труда?

Когда речь идет об отдельных предприятиях, экономическая теория признает существование прямой связи между размером предприятия и производительностью труда. Преимущества крупного производства перед мелким, «экономия на условиях производства, характеризующая производство в крупном масштабе»[5], подчеркивались еще К. Марксом.

Правда, даже и этот бесспорный принцип не может применяться догматически и толковаться таким образом, что только крупные и крупнейшие предприятия имеют право на существование. Так, в Директивах XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану на 1971—1975 гг. указывается на необходимость в небольших городах «размещать небольшие специализированные предприятия и филиалы заводов и фабрик» («Материалы XXIV съезда КПСС». М., Политиздат, 1971, с. 279). Вообще, «максимизация размера предприятий — это не самоцель. Ее суть в том эффекте, который достигается на основе этих размеров. Поэтому нельзя считать правильным, когда большим достижением объявляются сами по себе масштабы вложений в предприятие-гигант, а не величина получаемой обществом отдачи от этих затрат в сравнении с той отдачей, которую общество получило бы от предприятия меньших размеров»[6].

Подобный же подход возможен и в отношении всего

[5] *К. Маркс* и *Ф. Энгельс*. Соч., т. 25, ч. I, с. 90.

[6] «Вопросы оптимального размера предприятий в промышленности СССР». М., «Экономика», 1968, с. 13.

народного хозяйства в целом. Как влияет численность населения на эффективность работы народного хозяйства, на производительность труда среднего работника? Нет ли здесь аналогии с отдельным предприятием?

Вопрос об экономических последствиях численности населения, «размера нации» давно занимает умы экономистов. Правда, повышенный интерес к этому вопросу обычно связан с определенными политическими событиями, оценка экономического значения «размера нации» часто не свободна от влияний эмоционального характера. Австрийский экономист Ротшильд пишет о распространении «размерного пессимизма» (size pessimism) в странах, от которых в силу тех или иных политических событий отпали значительные территории. Так было после первой мировой войны в Австрии в результате развала Австро-Венгерской империи; превращение Австрии в маленькую страну отождествлялось в представлении многих с сокращением ее экономических возможностей. Так было позднее в результате крушения колониальных империй в таких странах, как Нидерланды или Бельгия, и даже в более крупных (Англия, Франция).

В то же время Ротшильд отмечает, что никакого «размерного пессимизма» не наблюдалось в маленьких странах, созданных в результате завоевания государственной самостоятельности, например в возникших на развалинах Австро-Венгерской империи Чехословакии, Венгрии и т. п. В них, наоборот, преобладал дух оптимизма, вызванный к жизни национальным освобождением и открывающимися новыми возможностями[7].

Функционирование современного крайне сложного многоотраслевого народного хозяйства невозможно без некоторой минимальной, но все же весьма значительной численности населения. Сама необходимость существования огромного количества *различных* народнохозяйственных объектов (промышленных предприятий, научных учреждений и т. п.), потребность в развитом всестороннем разделении труда внутри общества задает некий уровень, ниже которого не может опуститься без ущерба для экономики численность трудовых ресурсов, а значит,

[7] «Economic consequences of the size of nations». London, 1960, p. 189.

и численность населения. Развитие наиболее эффективного массового и крупносерийного производства предполагает существование достаточно емкого рынка, что также связано с численностью населения. Все народнохозяйственные объекты наиболее эффективны, когда они имеют рациональные, оптимальные размеры, но при малочисленном населении и развитом разделении труда неизбежны карликовые размеры многих таких объектов, а значит, и низкая их эффективность.

Аналогичные соображения могут быть развиты и в отношении форм территориальной концентрации населения и производства. Страны с более высокой численностью населения имеют бо́льшие возможности для создания крупных промышленных центров, сосредоточения населения в больших городах. Большие города, особенно столицы, играют огромную роль в современной экономической жизни, они являются средоточием наиболее прогрессивных элементов производительных сил, наиболее квалифицированных кадров, центрами научно-технического прогресса. Экономический и научно-технический потенциал этих городов, существенно влияющий на экономический и научно-технический потенциал всей страны в целом, в большой мере зависит от их величины. Однако далеко не каждая страна может позволить себе хотя бы один, не говоря уже о нескольких, достаточно крупный город, и ограниченность людских ресурсов играет при этом не последнюю роль.

Конечно, международное сотрудничество открывает перед малыми государствами широчайшие возможности для преодоления узости внутреннего рынка, трудностей, связанных с созданием экономических и территориально-экономических комплексов оптимальных размеров, для обмена результатами материальной и духовной деятельности. Примером использования таких возможностей может служить развивающаяся экономическая интеграция социалистических стран. В условиях же капитализма при наличии экономических и политических межгосударственных противоречий, таможенных барьеров и т. п., международное сотрудничество наталкивается на очень серьезные, порой непреодолимые препятствия. Может возникнуть мысль, что в этих условиях относительно более высокая численность населения все же несет в себе определенные экономические преимущества.

Можно привести еще и другие соображения в пользу более высокой численности населения. Так, при большем населении меньше величина «общих издержек» на одного жителя. Современное государство имеет многочисленные расходы, отнюдь не пропорциональные общей численности населения. Велика эта численность или мала, всегда имеется одно центральное правительство, один дипломатический аппарат, целый ряд учреждений всегда существует в единственном числе[8].

В целом влияние численности населения на эффективность производства пока изучено слабо. Существующая в настоящее время статистика мало чем может помочь в этом изучении; экономисты и демографы, касающиеся этого вопроса, оперируют случайными, разрозненными данными и приходят зачастую к противоречивым выводам. Во время международной конференции, посвященной экономическим последствиям «размеров наций» (Лиссабон, 1957 г.), выступавшие с докладами американские экономисты отмечали наличие положительного эффекта масштаба в экономике США, в то время как многие представители небольших европейских стран пытались показать, что малые масштабы экономики этих стран не являются помехой для их развития.

В теоретическом плане, однако, проблема влияния численности населения на эффективность производства давно уже занимает внимание экономистов, что нашло отражение в постановке вопроса об оптимальной численности населения[9].

---

[8] Более подробное изучение этого вопроса относится к анализу влияния демографических процессов на потребление, чем в данной статье мы не занимаемся.

[9] Согласно Л. Бюке (L. Buquet. L'optimum de population, Paris, 1956, p. 25), понятие оптимума населения было впервые сформулировано английским экономистом Эдвином Кеннаном (E. Cannan) в книге «Elementary Political Economy», London, 1888. Термин «оптимум населения» впервые встречается у К. Викселля (K. Wieksell. Das Optimum der Bevölkerung. Die neue Generation. Berlin, 1910).

Следует сразу же отделить теоретическую идею оптимума населения, которая может оказаться полезной в научном анализе, от ее использования в мальтузианском духе, пример чему подал сам Викселль. Цитируя утверждение Викселля о том, что в Швеции в его время оптимум населения был сильно превышен и что только энергичное ограничение рождаемости на протяжении нескольких десятилетий позволит достичь повышения благосостояния, Л. Бюке

Действительно, если с самого начала исходить из того, что с точки зрения эффективности производства численность населения не является абсолютно безразличным фактором, то, воздав должное положительному экономическому эффекту высокой численности населения, следует задаться вопросом: а не возникает ли наряду с положительным и отрицательный эффект? Каково в конечном счете соотношение плюсов и минусов?

Большие масштабы производства требуют преодоления и нежелательных последствий. Одно из них — нарастающая с увеличением масштабов сложность управления огромным экономическим механизмом, взаимоувязывания работы отдельных его частей, получения информации и ее переработки и т. п. Отсюда вытекает увеличение и удорожание управленческого аппарата на всех уровнях, непропорциональное увеличению масштаба производства, и в конечном счете возможное снижение производительности труда. Поскольку идеальная координация усилий всех подразделений народнохозяйственного комплекса вообще невозможна, при больших масштабах производства нарастают параллелизм, например, научных исследований и связанные с ним дополнительные издержки и т. п. Даже и отмеченные выше преимущества высокой степени территориальной концентрации производства и населения могут сосуществовать с нежелательными последствиями. В литературе достаточно часто отмечаются отрицательные стороны сверхбольших городов, затрагивающие в числе прочих и экономическую область. Не случайно Директивы XXIV съезда КПСС предусматривают «неуклонно осуществлять курс на сдерживание роста крупных городов; прекратить, как правило, размещение в этих городах новых промышленных предприятий»[10].

Понятие «оптимальной численности населения» автоматически вытекает из гипотезы, согласно которой произ-

---

справедливо замечает по этому поводу: «Мы спрашиваем себя, в какой мере личные убеждения Викселля, который поддерживал неомальтузианское движение, повлияли на этот вывод. Не был ли он склонен, как и многие другие авторы того же направления после него, придавать видимость научности пропаганде ограничения рождаемости?» (L. Buquet, L'optimum de population, p. 39—40).

[10] «Материалы XXIV съезда КПСС», с. 279.

6. Заказ 2893.

водительность труда рассматривается как величина, при прочих равных условиях зависящая от масштабов производства. Эти масштабы при сделанных выше оговорках характеризуются величиной L — численностью работников, а в конечном счете общей численностью населения P, так что

$$q = q(P) \qquad (19)$$

По предположению ряда авторов, функция имеет вид кривой на рис. 2. Имеется в виду, что по мере увеличения масштаба производства до определенного момента преобладает положительный эффект и производительность труда растет, а затем нарастание отрицательных явлений приводит к тому, что и суммарный эффект становится отрицательным, так что рост производительности сменяется ее падением. На кривой изменения производительности имеется, следовательно, точка, в которой производительность максимальна. Абсцисса этой точки есть численность населения, при которой достигается максимальный эффект. Эта численность населения (конечно, в рамках очень узкой рассматриваемой здесь задачи) по их мнению является оптимальной.

К понятию «оптимальной численности населения» можно прийти, отталкиваясь и от других исходных условий. Выше, говоря о неизменности экономических условий, мы полагали неизменной вооруженность труда, но тем самым признавали меняющимся общий объем используемых экономических ресурсов, которыми и был «вооружен» труд. Теперь поступим наоборот. Предположим фиксированным общий объем экономических ресурсов, например территорию страны, ее естественные богатства, ее основные фонды и т. п. Тогда, естественно, с изменением численности населения будет изменяться и величина ресурсов, приходящихся на одного жителя и на одного работника. Уровень техники, конечно, предполагается здесь постоянным.

Понятно, что если начать с очень маленькой численности населения, то многие имеющиеся ресурсы просто не смогут быть использованы: не будут осваиваться необжитые районы, разрабатываться месторождения полезных ископаемых и т. п. По мере перехода к более многочисленному населению возможности использования наличных ресурсов будут возрастать, в связи с чем возможен и рост производительности труда. Однако рост чис-

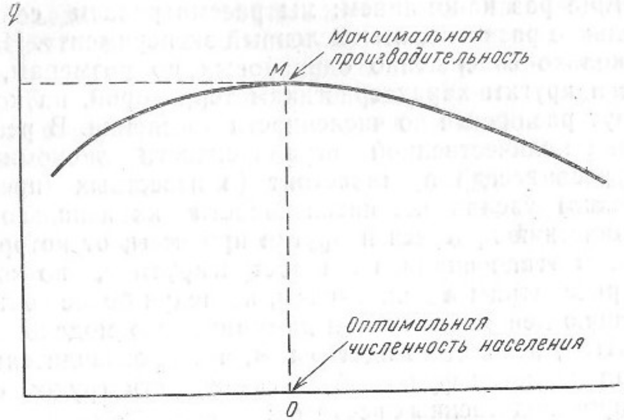

Рис. 2. Зависимость производительности труда от численности населения (гипотеза).

ленности населения при неизменном объеме ресурсов и неизменной технике не может не привести к тому, что, после того как полное использование всех ресурсов будет достигнуто, объем ресурсов в расчете на одного работника, его ресурсовооруженность начнут уменьшаться, немедленно вызывая снижение производительности труда в расчете на одного занятого или, при прочих равных условиях, на душу населения (причем производительность труда в расчете на единицу рабочего времени при этом не обязательно должна измениться).

Земля, например, может возделываться, если на каждого работника приходится в среднем 15, 20 и 25 *га*, но при одинаковых плодородии, уровне техники и величине трудовых затрат производительность труда одного работника будет изменяться в зависимости от величины эксплуатируемого им земельного участка. Если участок слишком велик, он не сможет затратить на каждый гектар столько труда, сколько необходимо для получения максимально возможного урожая; если участок слишком мал, окажется в избытке труд. Всегда можно указать такой размер земельного участка, который при данных затратах труда даст наибольший урожай; отступление же от этого размера в ту или иную сторону приведет к снижению производительности труда. Это рассуждение справедливо и в отношении других видов ресурсов.

Еще раз напоминаем: мы рассматриваем сейчас не реальное развитие, а «мысленный эксперимент». Имеется несколько совершенно одинаковых по размерам, запасам и другим характеристикам территорий, на которых живут различные по численности населения. В реальной жизни количественной ограниченности экономических ресурсов всегда противостоит (в известных пределах, конечно) увеличение интенсивности их использования, технический прогресс и другие процессы, от которых на данном этапе анализа мы абстрагируемся, но которые мы рассмотрим в дальнейшем, исследуя более соответствующую действительности динамическую модель.

Итак, речь здесь идет о том, что производительность труда является функцией обеспеченности трудом единицы производственных ресурсов:

$$q=\varphi\left(\frac{G}{L}\right), \qquad (20)$$

где G — все производственные ресурсы. Так как их общий объем принимается неизменным и так как неизменно соотношение $L:P$, то в конечном счете

$$q=\varphi(P). \qquad (21)$$

Общий характер зависимости $q=\varphi(P)$ предполагается таким же, как и $q=f(P)$ (см. рис. 2), хотя возрастание и убывание функции $\varphi(P)$ происходит по другой причине — из-за изменения соотношения между ресурсами и живым трудом.

Рассмотрение вопроса о соотношении численности населения и объема производственных ресурсов не будет продолжено в рамках статического анализа. Само его возникновение здесь было уже отступлением от условий, сформулированных в начале этого раздела. Но это отступление необходимо, чтобы подчеркнуть, что два указанных подхода являются различными и что каждый из них допускает независимую постановку вопроса об оптимуме, что важно, потому что традиционным является смешение этих двух вопросов.

Так, в одном из первых определений оптимума населения, принадлежащем Кнуту Викселлю, говорится: «Действуют две совершенно противоположные тенденции. С одной стороны, производительность труда уменьшается, когда люди повсеместно располагают лишь самой малой частью земли или естественных ресурсов; с другой стороны, для того чтобы подчинить себе силы природы, объединение человеческих сил, разделение труда, сотрудничество, организация промышленности всегда важны и в определенных условиях их значение весьма велико. Как раз в той точке, в которой эти тенденции уравновешиваются, и находится действительный оптимум населения»[11].

В этом определении положительные факторы связываются с большей численностью населения, отрицательные — с его обеспеченностью ресурсами, как будто бы одно противоречит другому. В действительности, как мы видели, можно предположить как отрицательные, так и положительные последствия и изменений численности, и изменений обеспеченности ресурсами: в каждом случае будет свой оптимум.

Возвращаясь к вопросу о влиянии численности населения на производственную функцию, как он был поставлен в начале этого раздела, можно сформулировать результаты рассмотрения этого вопроса следующим образом. Имеются определенные основания полагать, что численность населения влияет на производительность труда, а также предположить функциональную зависимость (19). Это значит, что на участке возрастания функции $q(P)$ (см. рис. 2) с переходом от меньшей численности населения к большей выпуск увеличивается в большей степени, чем численность населения (положительный эффект масштаба). Вполне может оказаться, что, даже если теоретическое представление о существовании участка убывания функции $q(P)$ верно, в реальной действительности ни в одной экономически развитой стране не достигнута столь высокая численность населения, не говоря уже о том, что в действительности никогда не осуществляются принятые абстракции; так что практически приходится иметь дело только с положительными последствиями большой численности населения. Но теоретически на участке убывания $q(P)$, если он есть, при переходе от меньшей численности населения к большей выпуск должен увеличиваться в меньшей степени, чем численность населения (отрицательный эффект масштаба).

С учетом сказанного выражение (18) приобретает вид

$$Q=q(P)P\int_0^{\omega}C(x)\xi(x)s(x)\,dx. \qquad (22)$$

[11] Цит. по: *L. Buquet.* L'optimum de population, p. 38.

Структура населения и производственная функция

Когда мы рассматривали выше, как влияют на производственную функцию различия в численности населения, его структура, естественно, предполагалась неизменной. Можно, однако, предположить меняющуюся структуру, и тогда мы немедленно столкнемся с тем, что структурные различия также влияют на общее число работников и на производительность их труда. Этому влиянию долгое время не придавалось должного значения, оно незаслуженно недооценивалось, не замечалось на фоне очевидного воздействия различий в численности населения, которым обычно придается очень большое значение.

Чтобы наблюдать влияние структурного фактора в чистом виде, предположим, что имеется несколько населений, одинаковых по численности, но имеющих различные структуры (экономические условия, как и прежде, предполагаются одинаковыми). Не касаясь пока возможных причин различий в структуре населения, а принимая их как нечто данное, мы рассмотрим влияние этих различий на производственную функцию, оказываемое через различия в экономической активности, в уровне мобильности и в производительности труда.

Структура населения и его экономическая активность

Степень участия населения в производстве — уровень его экономической активности — является важной характеристикой, влияющей на развитие народного хозяйства страны или ее отдельных районов. Экономическая активность населения зависит от множества экономических, социальных, культурных и других факторов, среди которых не последнее место принадлежит и факторам демографическим. Хотя полностью выделить влияние демографических факторов на экономическую активность, отделив его от всех прочих влияний, невозможно, многие связи между демографическими характеристиками и степенью участия населения в производстве прослеживаются довольно четко и их изучение может оказаться полезным для анализа и прогноза показателей народнохозяйственного развития.

Прежде всего, экономическая активность населения связана с его *возрастно-половой структурой*. Каждой

возрастно-половой группе присущи свои коэффициенты экономической активности, и существуют определенные закономерности изменений этих коэффициентов при переходе от одних возрастно-половых групп к другим. Это, конечно, не означает, что существуют какие-то «естественные» нормы экономической активности, в различных исторических и социально-экономических условиях активность одних и тех же возрастно-половых групп может быть совершенно различной. Уровень экономической активности определяется не принадлежностью к той или иной возрастно-половой группе, а какими-то другими факторами. При капитализме, например, он зависит от спроса на рабочую силу и от уровня безработицы. Возрастно-половые характеристики объясняют лишь *различия* в активности отдельных групп одного и того же населения.

Рассматривая участие населения в производстве, мы прежде всего обнаруживаем, что коэффициент экономической активности у мужчин обычно намного выше, чем у женщин, но и у тех и у других эта активность изменяется с возрастом. У мужчин эти изменения носят более плавный характер, коэффициент экономической активности достигает максимума после 20 лет, довольно долго держится на почти неизменном уровне, а затем, по достижении пенсионного возраста, быстро падает. У женщин такой плавности может и не быть, но связь между экономической активностью и возрастом четко прослеживается и у них. Поэтому как у мужчин, так и у женщин коэффициенты активности можно рассматривать как функцию возраста населения $\xi(x)$ (функция экономической активности, или занятости).

Поведение функции занятости определяется целым рядом физиологических, исторических, социально-экономических факторов; в частности, оно очень тесно связано с такими демографическими характеристиками, как матримониальное состояние и уровень рождаемости.

Влияние *матримониального состояния* на функцию занятости наиболее наглядно проявляется, конечно, у женщин. Пребывание в браке сочетается, как правило, с более низким уровнем экономической активности. Если брак по той или иной причине прерывается, этот уровень существенно повышается, однако наиболее высок он у тех женщин, которые никогда не состояли в браке.

Вторым важным демографическим показателем, влияющим на поведение функции занятости (в первую очередь женщин), является *число детей,* приходящихся на одну женщину. Этот показатель отражает одновременно уровни таких важнейших демографических процессов, как рождаемость и смертность в ранних возрастах, причем обычно экономическая активность женщин находится в обратной связи с числом детей и в прямой связи с их возрастом.

В целом занятость ξ можно рассматривать не только как функцию возраста, но и как функцию ряда других демографических переменных (матримониального состояния, числа детей и т. п.):

$$\xi(x)=\xi(x, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n). \tag{23}$$

Тогда общее число занятых в возрасте x будет:

$$\boxed{L(x)=PC(x)\,\xi(x, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n).} \tag{24}$$

Структура населения и его мобильность

Рассмотренная выше экономическая активность населения является одним из проявлений более широкого класса явлений, объединяемых в понятии «мобильность населения». Мобильность населения — это его способность и готовность изменять свое экономическое или социальное положение, уровень образования или профессию, место работы или место жительства и т. п. Но если важность высокой степени экономической активности населения широко осознана, то в отношении многих других видов мобильности часто приходится сталкиваться с явной недооценкой, доходящей иногда до крайне негативной позиции, например в отношении текучести кадров, в которой видят только отрицательные стороны.

Между тем высокая мобильность населения является положительным результатом длительного исторического развития, прогрессивным последствием развития капитализма («капитализм необходимо создает подвижность населения, которая не требовалась прежними системами общественного хозяйства и была невозможна при них в сколько-нибудь широких размерах»[12]).

Народное хозяйство всегда предъявляет определенные требования к мобильности населения. Жизнедеятельность развитой экономической системы не может осуществляться без постоянных процессов изменения, обновления и роста, которые, в свою очередь, невозможны без определенного, достаточно высокого уровня мобильности, без непрерывного перетока рабочей силы из одних точек системы в другие. Если мобильность падает ниже потребного уровня, процессы непрерывного совершенствования экономической структуры, ее приспособления к новым условиям затрудняются, а значит, замедляется рост общественной производительности труда.

[12] *В. И. Ленин.* Полн. собр. соч., т. 3, с. 600.

Даже если оставаться только в рамках статического анализа, рассматривать только один воспроизводственный цикл и предполагать полное отсутствие каких-либо технических или организационных нововведений, нельзя не видеть необходимость постоянного возникновения вакантных рабочих мест:

часть работников, достигнув предельного возраста, выходит из состава рабочей силы; +

часть работников умирает в трудоспособном возрасте; +

общее число рабочих мест увеличивается в связи с необходимостью обеспечить работой добавочную по сравнению с прошлым циклом численность работников. − ? !

Уже только эти три пункта требуют определенного числа перемещений среди действующей рабочей силы, причем перемещений не только с одного места работы на другое, но и географических (так как часть новых рабочих мест создается путем строительства новых предприятий, в том числе и в новых районах). Если учесть, что речь идет не о колесиках и винтиках какого-то механизма, а о человеческом обществе, о перемещениях людей, то становится ясно, что коэффициент полезного действия таких перемещений не может быть равен 100%, что часть работников, занявших вакантные места, не удержится на них, часть переехавших в новые районы вернется назад; необходимое вначале число перемещений, возможно даже небольшое, повлечет за собой их многократное умножение, потому что каждый перешедший на новое место освобождает свое, которое тоже должно быть занято, и т. п. Все эти перемещения необходимы с точки зрения общественного производства, и, если уровень мобильности трудоспособного населения недостаточен для того, чтобы их обеспечить, производство терпит ущерб.

С другой стороны, аналогичный ущерб может возникнуть, если мобильность населения выше, чем требуется. Невозможность реализовать свою потенциальную мобильность порождает у человека чувство неудовлетворенности, отсутствия перспективы, ослабляет его стимулы к работе и в конечном счете отрицательно сказывается на эффективности его труда.

Уровень мобильности, как потенциальной, так и реальной, определяется в первую очередь социально-экономическими факторами. Однако при прочих равных условиях: в рамках одной и той же социально-экономической системы, при одинаковом уровне развития производительных сил и т. п. — весьма существенными становятся факторы второго порядка, среди которых не последнее место занимает и демографическая структура населения.

Совершенно очевидна зависимость мобильности населения в любых ее проявлениях от *возраста*. В этом можно убедиться, рассматривая, например, географическую мобильность. Многочисленные наблюдения показывают тесную связь между возрастом и территориальной мобильностью (интенсивность миграции, как правило, достигает максимума между 15 и 25 годами, а затем быстро убывает), а также между возрастом и текучестью кадров (интенсивность текучести достигает максимума в младших трудоспособных возрастах, а затем быстро уменьшается). Всем известна тесная связь с возрастом таких форм мобильности, как повышение уровня образования, смена профессии или специальности (учатся и переучиваются в основном в молодости), а также и таких, имеющих меньшее экономическое значение, как матримониальная мобильность.

Влияние *пола* на мобильность менее однозначно. Один из ранних исследователей миграции, английский статистик прошлого века Рейвенстейн установил «законы» миграции, один из которых даже гласил: «Женщины более склонны к миграции, чем мужчины». Для современного периода характерна скорее противоположная закономерность, хотя в некоторых возрастных группах мобильность женщин действительно бывает более высокой, чем мужчин (это явление установили, например, исследователи мобильности населения в США в 50-х—60-х годах для возрастов от 18 до 22—24 лет). Менее мобильны женщины и когда речь идет о текучести рабочей силы.

Более низкая мобильность женщин является в значительной степени результатом различий в социальном положении мужчин и женщин, которые в принципе устранимы. Однако эти различия сложились в результате длительного исторического развития, закреплены вековыми традициями и поддаются ликвидации с большим трудом и лишь постепенно. В нашей стране экономическая роль женщины выше, чем где бы то ни было, и тем не менее по всем показателям мобильности женщины отстают от мужчин. Они менее интенсивно мигрируют, менее склонны к перемене места работы, к повышению квалификации и т. п.

Однако возрастно-половые различия в мобильности населения, конечно, не сводятся только к различиям в социальном положении тех или иных возрастно-половых групп, они складываются под влиянием и ряда других факторов. Какими бы условиями ни определялся уровень мобильности, его изменения на протяжении человеческой жизни имеют тенденцию отражать цикл семейной жизни: уход из родительской семьи, приобретение экономической самостоятельности, вступление в брак, рождение детей и т. п. Поэтому общий «ресурс мобильности» населения в целом при прочих равных условиях существенно зависит и от демографических процессов и от вытекающей из них демографической структуры населения. Например, высокая рождаемость при низкой смертности ведет к высокой доле молодых, наиболее мобильных контингентов во всем населении; с другой стороны, высокая рождаемость снижает мобильность многодетных матерей, увеличивает число больших, маломобильных семей и т. п.

Поэтому вполне логично рассматривать общий уровень мобильности M (измеряемый, например, числом перемен состояния в единицу времени) как функцию от некоторых демографических параметров $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$; выбор их может зависеть от конкретных условий (наличных статистических данных, важности того или иного параметра, рассматриваемой демографической модели и прочих соображений): $M = M(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$.

В свою очередь, как отмечалось выше, определенный уровень мобильности является экономическим требованием; отклонение действительного уровня мобильности от потребного может оказать отрицательное воздействие на эффективность производства, на общественную производительность труда. В этом смысле общественную производительность труда можно считать функцией уровня мобильности $q=q(M)$, а в конечном счете функцией экзогенных демографических переменных $\Delta_1, \Delta_2 \ldots, \Delta_n$:

$$q=q[M(\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n)] \ . \qquad (25)$$

Учитывая формулу (19), имеем

$$q=q[P, M(\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_n)] \ . \qquad (26)$$

Структура населения и производительность труда

Как было показано выше, демографическая структура всего населения накладывает четкий отпечаток на демографическую структуру населения, занятого в производстве; последняя же имеет немалое значение с точки зрения производительности труда среднего работника. Производительность труда представителей различных возрастно-половых групп неодинакова; на всем протяжении своей рабочей жизни человек испытывает влияние самых различных факторов, которые, суммируясь, определяют производственный потенциал каждого отдельного человека, так же как и типичного «среднего» представителя каждой возрастно-половой группы.

Попытка более подробного рассмотрения того, как отдельные факторы (физиологические факторы, накопленный производственный опыт, знания, отношение к труду) действуют в различные периоды жизни человека, содержится в нашей статье «Экономические последствия старения трудоспособного населения»[13]. Мы не смогли, однако, продвинуться дальше самых общих соображений и вынуждены были отметить, что многообразие и слабая изученность факторов, влияющих на производительность труда работников разных возрастов (это справедливо и в отношении работников разных полов), отсутствие удовлетворительных эмпирических данных и сложность исследования вопроса делают надежную оценку качества рабочей силы в зависимости от демографических характеристик работника крайне трудной.

Между тем именно вопрос о значении возраста работников является примером вопроса, приобретающего актуальность в связи с современными тенденциями демографического развития. Постарение трудоспособного населения, нарастание доли лиц старших возрастов в составе функционирующей рабочей силы — настораживающий симптом тех изменений, которые вытекают главным образом из снижения рождаемости в экономически развитых странах мира. Этот вопрос заслуживает пристального внимания со стороны экономистов и демографов.

[13] «Демографические тетради». Вып. II—III. Киев, 1970, с. 93 и след.

Научно-техническая революция может поставить общество перед необходимостью принципиально изменить систему обеспечения общественного производства квалифицированными кадрами, выработать стратегию постоянной синхронизации фактической профессионально-квалификационной структуры работников с потребной, которая непрерывно и быстро изменяется. А это невозможно сделать, не зная с достаточной полнотой потенциальных производственных возможностей работников различных возрастов.

Но, конечно, возраст является не единственным демографическим фактором, оказывающим влияние на производительность труда. Соотношения повозрастных производительностей (s) уточняются при учете других демографических переменных; так что и здесь можно записать

$$s(x)=s(x, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n) \ . \qquad (27)$$

Структура населения и производственная функция в целом

Проведенный выше анализ убеждает в том, что демографическая структура ни в коем случае не является безразличным с точки зрения производства фактором. Состав населения по полу и возрасту, распределение семей по числу детей, брачная структура и другие структурные демографические характеристики оказывают заметное влияние на экономическую активность, экономическую мобильность и производительность труда населения в целом. Далеко не всегда мы располагаем данными для того, чтобы дать конкретную характеристику этого влияния, в ряде случаев пришлось довольствоваться лишь самыми общими соображениями и весьма абстрактными гипотезами, но все же проделанный анализ дал возможность представить более или менее четкую схему механизма воздействия демографической структуры на производство.

С учетом формул (18), (23), (26) и (27) запишем производственную функцию следующим образом:

$$Q = q[P, M(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)] \times$$

$$\times P \int_0^{\omega} C(x) \xi(x, \Delta_1, \ldots, \Delta_n) s(x, \Delta_1, \ldots, \Delta_n) dx, \qquad (28)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — любые характеристики демографической структуры.

В зависимости от целей анализа, наличной информации и т. п. можно рассматривать большее или меньшее число этих характеристик. Формула (28) может использоваться для составления прогноза, более грубого или менее грубого в зависимости от того, какие структурные демографические показатели учитываются и с какой тщательностью разрабатываются гипотезы в отношении их будущих изменений.

Ниже на схематическом числовом примере показано использование формулы (28) для исследования влияния демографической структуры на величину выпуска. Табл. 2 содержит иллюстративный расчет, отражающий влияние демографической структуры при учете очень малого числа факторов. Учитывается только влияние возрастной структуры на занятость и производительность труда и влияние числа детей, приходящихся на одну женщину, на занятость. Рассматриваются три населения: *А*, *Б* и *В*; чтобы приблизить пример к реальности, взяты действительные возрастные структуры населений Армянской (*А*), Грузинской (*Б*) и Латвийской (*В*) союзных республик в 1959 г. Значения $s(x)$ соответствуют величине годового производства на одного работника каждой возрастной группы в Венгрии в 1959—1960 гг.[14]. Функция $\xi(x)$ построена на основании средних для СССР данных 1959 г.[15] и в таком виде использована для населения *Б*. Исходя из того что в населении *А* удельный вес

[14] *E. Valkovics*. Magyarország népességének gazdasági korfái, Budapest, 1967, p. 22.

[15] «Итоги Всесоюзной переписи населения 1959 г. СССР», с. 49, 104, 116.

детей существенно выше, а в населении *В* существенно ниже, чем в населении *Б*, мы предположили, что значения $\xi(x)$ в первом случае будут на 5% меньше, а во втором — на 5% больше, чем у населения *Б* (в результате влияния числа детей на функцию занятости женщин).

Если исходить из предположения, что производительность работника в возрасте 35—39 лет, принятая за единицу, одинакова для всех трех населений, то объем выпуска в расчете на одного работника (в условных единицах) составит:

население *А* — 36,55 : 40,57 = 0,900;
население *Б* — 42,07 : 46,48 = 0,905;
население *В* — 46,64 : 51,13 = 0,912.

Введение в расчет большого числа учитываемых факторов могло бы повлиять на изменение полученных результатов в ту или иную сторону. Было бы интересно, например, исследовать, как более молодая возрастная структура населения *А* влияет на его мобильность и не приводит ли это влияние к «утяжелению» условной единицы по сравнению с двумя другими населениями, но, к сожалению, такое исследование пока не было проведено.

При рассмотрении вопроса о влиянии численности населения на производственную функцию мы пришли к выводу, что при определенных условиях можно говорить об оптимальной численности населения. Теперь мы выяснили значение демографической структуры и можем поставить вопрос о населении, имеющем наилучшую структуру. Если считать наилучшей такую демографическую структуру, при которой достигается наибольшее значение производственной функции, то в нашем примере следует отдать предпочтение структуре населения *В* (в дальнейшем мы покажем, как учет новых факторов приведет к изменению этого вывода). Вообще, среди бесчисленного множества возможных структур при наличии необходимых данных о зависимости параметров функций от демографических переменных $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ всегда можно выбрать структуру или несколько равноценных структур, наилучших с точки зрения избранного критерия.

Следует отметить, что фактор численности и фактор структуры могут по-разному взаимодействовать между собой, влияя в одном и том же или в различных направ-

Таблица 2

Возрастные группы	s(x)	Население А C(x)	Население А ξ(x)	Население А L(x)	Население А s(x)L(x)	Население Б C(x)	Население Б ξ(x)	Население Б L(x)	Население Б s(x)L(x)	Население В C(x)	Население В ξ(x)	Население В L(x)	Население В s(x)L(x)
0–15	—	37,8	—	—	—	30,2	—	—	—	23,4	—	—	—
16—19	0,64	6,8	60,8	4,13	2,64	7,4	64,0	4,74	3,03	6,6	67,2	4,44	2,84
20—24	0,82	10,7	77,0	8,24	6,76	9,9	81,0	8,02	6,58	8,2	85,1	6,98	5,72
25—29	0,95	9,5	78,9	7,50	7,12	9,1	83,0	7,55	7,17	8,5	87,2	7,41	7,04
30—34	0,99	9,0	77,9	7,01	6,94	9,0	82,0	7,38	7,31	8,2	86,1	7,06	6,99
35—39	1,00	4,1	77,0	3,16	3,16	5,5	81,0	4,46	4,46	6,3	85,1	5,36	5,36
40—44	1,01	3,2	74,1	2,37	2,39	4,7	78,0	3,67	3,71	5,1	81,9	4,18	4,22
45—49	0,98	4,0	70,3	2,81	2,75	4,9	74,0	3,63	3,56	6,6	77,7	5,13	5,03
50—54	0,96	3,7	62,7	2,32	2,23	4,2	66,0	2,77	2,66	6,5	69,3	4,50	4,32
55—59	0,95	3,2	44,7	1,43	1,36	4,2	47,0	1,97	1,87	5,6	49,4	2,77	2,63
60—69	0,79	4,3	20,0	0,86	0,68	5,8	21,0	1,22	0,96	8,2	22,0	1,80	1,42
70 и более	0,71	3,7	20,0	0,74	0,52	5,1	21,0	1,07	0,76	6,8	22,0	1,50	1,07
		100,0		40,57	36,55	100,0		46,48	42,07	100,0		51,13	46,64

лениях. Действительно, предположим, что все три только что рассмотренных населения расположены на участке возрастания функции $q(P)$ (см. рис. 2). Если $P_А < P_Б < P_В$, то положительный эффект масштаба, соединившись с эффектом структуры, еще более увеличит преимущество населения $В$ перед населениями $А$ и $Б$. Если же, наоборот, $P_А > P_Б > P_В$, то отрицательный эффект масштаба может свести на нет или, во всяком случае, ослабить положительное влияние структуры, лишив население $В$ его преимуществ перед $А$ и $Б$. Иначе говоря, оптимальное по численности население может не быть оптимальным по структуре и наоборот. Но из известного набора населений с той или иной численностью и структурой опять-таки всегда можно выбрать одно или несколько равноценных населений, оптимальных с точки зрения определенного критерия.

В следующем разделе мы еще вернемся к понятию демографического оптимума, но здесь необходимо уточнить, какую роль играет это понятие в нашем изложении. Очевидно, что всякая целенаправленная деятельность предполагает поиски наилучшего пути достижения поставленной цели. Этот наилучший путь может определяться воздействием многих факторов, среди которых занимает свое место и демографический фактор. Очень может быть, что интересующий нас в конечном счете оптимум экономического и социального развития не совместим с демографическим оптимумом, как он рассматривается в настоящей работе, посвященной воздействию демографических факторов на производственную функцию. Поэтому указать на такой оптимум — еще не значит призывать к его достижению. Больше того, указать на существование такого оптимума — еще не значит призывать к его количественной оценке, к его вычислению, которое по ряду причин может оказаться невозможным. Но введение в анализ понятия демографического оптимума облегчает рассмотрение взаимодействия демографических и экономических сил, тех основных направлений, в которых действуют различные изменения в демографической области, и тех границ, по достижении которых положительные последствия сменяются отрицательными и наоборот.

7. Заказ 2893.

3. Демографический рост и рост производства

Статический и динамический подходы в экономике

Экономиста постоянно интересует два типа задач. С одной стороны, речь всегда может идти об изучении *состояния* экономики, с другой — об исследовании ее *роста.*

Предположим, что мы хотим сравнить между собой экономики двух стран. Путем сопоставления большего или меньшего числа показателей, характеризующих в конечном счете, соотношение затрат и результатов в производстве, уровни потребления и т. п., мы может прийти к неоспоримому выводу, что экономика страны *А* более развита, чем экономика страны *Б*. Этот вывод объективно отражает действительность и представляет самостоятельный интерес.

Но никакая экономика никогда не пребывает в состоянии абсолютной неподвижности; тем более не является неподвижной современная экономика, даже если речь идет о самых отсталых в экономическом отношении странах мира. Показатели, характеризующие состояние экономики в данный момент, подвергаются постоянным изменениям, и то, что было верно вчера, может оказаться неверным сегодня. Страна *Б* может рано или поздно обогнать страну *А* по уровню экономического развития. Чтобы знать, произойдет ли это, и если произойдет, то когда, надо располагать какими-то другими показателями, характеризующими скорость происходящих изменений. Вывод о том, что экономика страны *Б* растет быстрее, чем экономика страны *А,* не менее важен, чем вывод, согласно которому в данный момент страна *А* более развита, чем страна *Б*.

Изучение состояния экономики относится к области экономической статики. Статический анализ предполагает отсутствие каких бы то ни было качественных изменений во времени, но это не значит, что предполагается отсутствие любых изменений, без которых немыслима никакая экономическая деятельность[16]. Просто каждый цикл производства по качественным характеристикам, таким, как уровень техники, вкусы потребителей и т. п., ничем не отличается от любого другого цикла.

Наоборот, динамический анализ, к области которого относится изучение экономического *роста,* предполагает постоянное изменение качественных характеристик экономического процесса, всего его режима, и сводится именно к исследованию показателей этих изменений.

Перейдя к такому анализу, мы используем, подобно тому как это было сделано раньше, однoресурсную производственную функцию, придав ей динамический характер. Однако в дальнейшем мы должны будем перейти к двухресурсной модели (ниже мы попытаемся обосновать необходимость такого перехода).

Однoресурсная динамическая производственная функция

Динамическая производственная функция

Переход к динамической производственной функции требует введения в нее координаты времени, исследования зависимости от времени. Вместо исходных формул (9) и (10) появляются новые:

$$Q=f(G,t) \tag{29}$$

или

$$Q=\varphi(L,t) \tag{30}$$

Поскольку мы все еще считаем, что выполняется условие (8) — условие неизменности соотношения между трудом и фондами (хотя это условие становится с переходом к динамике весьма нереалистичным, и в конце концов мы должны будем от него отказаться), можно продолжать рассматривать однoресурсную производственную функцию. Будем исходить при этом из выражения (30) и соответственно (12):

$$Q(t)=q(t)L(t). \tag{31}$$

[16] «...Мы вправе спросить, в каком смысле «статическая» экономика может рассматриваться по аналогии с состоянием покоя в физическом мире. Нельзя же понимать под этим состояние, когда никто ничего не делает!... Статическое равновесие означает вовсе не состояние праздности, а, наоборот, состояние, где производство совершается непрерывно, изо дня в день и из года в год, но не увеличиваясь и не уменьшаясь. «Покой» означает, что величина различных показателей остается постоянной и производство продолжает свое движение по кругу» (*Р. Ф. Харрод*. К теории экономической динамики. М., Изд-во иностранной литературы, 1959, с. 41).

Конкретизируем зависимость переменных от t. Рассмотрим вначале производительность труда $q(t)$. Величина $q(t)$ складывается под влиянием двух групп факторов. Факторы первой группы зависят от времени непосредственно, подобно, например, фактору технического прогресса. Воздействие технического прогресса реализуется во времени, оно тем более эффективно, чем выше темпы внедрения новой техники; а изменения в производительности труда при прочих равных условиях тем больше, чем более длительный промежуток времени рассматривается. Иначе обстоит дело с таким, например, фактором, как масштаб производства. Эффект масштаба является типично статическим, он не зависит от временных характеристик процесса, который привел к установлению данного масштаба, может быть достигнут, скажем, путем простого объединения нескольких мелкомасштабных производственных единиц (теоретически вообще без затрат времени). Но если величина L рассматривается как функция времени, то естественно, что и рост производительности труда, зависящий от величины $L(t)$, также является в конечном счете функцией t.

Если бы изменения производительности труда со временем происходили только в результате изменений масштаба производства, то в любой момент t мы имели бы

$$q(t)=\tau[L(t)] \cdot \qquad (32)$$

Но если производительность труда меняется со временем еще и независимо от статических характеристик производства, то

$$q(t)=\tau[L(t)]\varepsilon(t), \qquad (33)$$

где $\varepsilon(t)$ — показатель непосредственной зависимости производительности труда от времени. Производственная функция в целом при этом приобретает вид

$$Q(t)=\tau[L(t)]\varepsilon(t)L(t) \cdot \qquad (34)$$

Показателями динамики переменных, входящих в выражение (34), могут служить темпы их изменений (т. е. логарифмические производные этих переменных, являющихся функциями времени), которые мы будем обозначать индексом T. Например,

$$Q_T=\frac{Q'(t)}{Q(t)} \cdot$$

Выразим темп роста выпуска в зависимости от темпов роста независимых переменных на основании формулы (34).

$$Q_T=\tau_T+\varepsilon_T+L_T \cdot \qquad (35)$$

Связь между темпом роста (вообще говоря, изменений) выпуска и темпом роста количества используемого труда устанавливается через динамический коэффициент трудоотдачи (коэффициент эластичности выпуска по отношению к количеству труда) α. Учитывая, что прирост числа работников (экстенсивный рост производства) порождает только часть прироста продукции, другая же часть порождена ростом производительности труда (интенсивный рост), имеем

$$\alpha=\frac{Q_T-\varepsilon_T}{L_T}, \qquad (36)$$

откуда несколькими тождественными преобразованиями[17] получаем

$$Q(t)=a_0\,\varepsilon(t)L^{\alpha}(t). \qquad (37)$$

Из формул (35) и (36) следует также, что

$$\alpha=\frac{L_T+\tau_T}{L_T}=1+\frac{\tau_T}{L_T} \cdot \qquad (38)$$

Если эффект масштаба отсутствует ($\tau_T=0$, изменения в численности работников не приводят к изменениям в производительности их труда), то, естественно, $\alpha=1$. Если эффект масштаба положителен (рост численности работников увеличивает производительность труда, т. е. $\frac{\tau_T}{L_T}>0$), $\alpha>1$, если отрицателен ($\frac{\tau_T}{L_T}<0$), $\alpha<1$.

Абсолютная величина изменения α колеблется обычно в пределах нескольких сотых. Здесь предполагается, что на протяжении рассматриваемого отрезка времени эта величина остается постоянной и что, следовательно,

$$\alpha=\text{const} \cdot \qquad (39)$$

Однако остальные параметры, входящие в производственную функцию (37), не являются константами, и, чтобы исследовать характер изменения выпуска в зави-

[17] $Q_T=\varepsilon_T+\alpha L_T$; $[\ln Q(t)]'=[\ln\varepsilon(t)+\alpha\ln L(t)]'$; $\ln Q(t)=\ln\varepsilon(t)+\alpha\ln L(t)+\ln a_0$; $Q(t)=a_0\varepsilon(t)L^{\alpha}(t)$, где a_0 — постоянная величина.

симости от поведения $\varepsilon(t)$ и $L(t)$, надо принять определенные гипотезы в отношении их изменений в связи с динамикой демографических переменных.

Демографический рост и численность работников

Первая гипотеза, которую надо принять, относится к динамике показателя L в зависимости от времени, Из формул (15) и (24) следует, что при статическом подходе

$$L=P\int_0^{\omega}C(x)\xi(x,\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n)\,dx. \qquad (40)$$

Различные демографические характеристики Δ_1, $\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ (интенсивность матримониальных процессов, брачной и внебрачной плодовитости, смертности и т. п.), взаимодействуя между собой, в конечном счете определяют режим воспроизводства населения в целом. Если мы будем рассматривать не отдельные реальные населения, как это было в предыдущем разделе, а теоретическое стабильное население, то взаимодействие различных демографических характеристик определяет истинный коэффициент естественного прироста этого населения r, который поэтому можно рассматривать как показатель, интегрирующий влияние ряда демографических характеристик. Вводя в формулу (40) фактор времени, заменяя показатели $\Delta_1, \Delta_2,\ldots,\Delta_n$ одним показателем r и учитывая, что возрастная структура стабильного населения не зависит от времени, но зависит от r, получаем

$$L(t)=L(t,r)=P(t,r)\int_0^{\omega}C(r,x)\xi(r,x)\,dx. \qquad (41)$$

Если в выражении (41) положить $t=0$, то мы вернемся к рассмотренным ранее статическим условиям с той разницей, что здесь они применены к стабильному населению. Проанализируем вначале именно этот случай:

$$L(0,r)=P(0,r)\int_0^{\omega}C(r,x)\xi(r,x)\,dx. \qquad (42)$$

Считая, что наши стабильные населения в момент $t=0$ по численности равны между собой, и приравнивая их к единице, имеем

$$L(0,r)=\int_0^{\omega}C(r,x)\xi(r,x)\,dx\cdot \qquad (43)$$

Если бы функция занятости не зависела от r, то изменение общего числа работников при переходе от одного r к другому определялось бы только функцией возрастной структуры $C(r,x)$. В этом случае легко можно было бы назвать значение r (темпа роста стабильного населения) оптимальное с точки зрения достижения наибольшей численности работников.

Пусть, например, мы хотим найти темп роста стабильного населения (см. табл. 1), при котором будет наибольшей численность работников в возрасте от 15 до 60 лет (функция занятости неизменна и примерно соответствует функции занятости всего населения СССР в 1959 г.). Шаг изменений r составляет 0,01 (табл. 3). Из таблицы следует, что в нашем примере наибольшая численность работников в расчете на одну и ту же численность населения достигается при $r=0{,}01$.

Таблица 3

Возрастные группы	$\varepsilon(x)$	$r=0{,}02$		$r=0{,}01$		$r=0$		$r=-0{,}01$	
		$C(r,x)$	$L(r,x)$	$C(r,x)$	$L(r,x)$	$C(r,x)$	$L(r,x)$	$C(r,x)$	$L(r,x)$
15—19	64,0	9,29	5,94	8,16	5,22	6,80	4,35	5,36	3,43
20—24	81,0	8,34	6,76	7,70	6,24	6,75	5,47	5,59	4,53
25—29	83,0	7,47	6,20	7,25	6,02	6,68	5,54	5,82	4,83
30—34	82,0	6,68	5,48	6,82	5,59	6,60	5,41	6,06	4,97
35—39	81,0	5,96	4,83	6,39	5,18	6,51	5,27	6,27	5,08
40—44	78,0	5,30	4,13	5,98	4,66	6,40	4,99	6,48	5,05
45—49	74,0	4,69	3,47	5,55	4,11	6,25	4,63	6,66	4,93
50—54	66,0	4,10	2,71	5,11	3,37	6,05	3,99	6,77	4,47
55—59	47,0	3,54	1,66	4,64	2,18	5,77	2,71	6,79	3,19
15—59			41,18		42,57		42,36		40,48

Но в действительности функция занятости вряд ли может оставаться неизменной при изменении r. Ведь, как уже отмечалось, изменения r неразрывно связаны с изменениями различных демографических характеристик, последние же неизбежно влияют на функцию занятости. Функция занятости женщин, а в какой-то мере и мужчин зависит от таких демографических характеристик, как матримониальное состояние, число детей на одну женщину, их возраст и т. п. Попытаемся учесть это влияние в нашем иллюстративном расчете. Чтобы не усложнять пример, рассмотрим воздействие только одного фактора — среднего числа детей.

Изменения истинного коэффициента естественного прироста r, которые мы предполагаем, неизбежно связаны с изменениями в уровне рождаемости и в числе детей, рождаемых в среднем одной женщиной. В — связано с коэффициентом r следующим приближенным соотношением[18]:

$$\mathrm{B}(r) \approx \frac{e^{rT}}{\delta S(T)},$$

где T – средний возраст матери при рождении ребенка (длина женского поколения). Обычно величина T близка к 28 годам (в СССР в 1958—1959 гг.— 28,4 года), поэтому в расчетах можно принимать $T=28$;

$S(T)$ – число женщин в возрасте T;

δ – доля девочек в общем числе родившихся.

Например, при неизменной повозрастной смертности населения СССР в 1958—1959 гг.:

при $r=0$ $\quad \mathrm{B}(r)=2{,}21$;
при $r=0{,}01$ $\quad \mathrm{B}(r)=2{,}92$;
при $r=0{,}02$ $\quad \mathrm{B}(r)=3{,}86$.

Естественно предположить (и это подтверждается имеющимися статистическими данными), что отношение между r и $\xi(r, x)$ может быть, как правило, только обратным, рост r может сочетаться только с падением $\xi(r, x)$ (в одних и тех же социально-экономических условиях, разумеется).

Учет влияния числа детей на экономическую активность женщин может внести существенные коррективы в сделанный ранее расчет. Предположим, что функция занятости, приведенная в предыдущей таблице, соответ-

[18] Это соотношение вытекает из того, что если R_0 — нетто-коэффициент, а R — брутто-коэффициент воспроизводства населения, то

$$\mathrm{B} = \frac{R}{\delta};$$

$$R \approx \frac{R_0}{S(T)};$$

$$R_0 = e^{rT}.$$

ствует стабильному населению, растущему на 0,01 в год. Если его рост ускоряется до 0,02 (число детей на одну женщину соответственно увеличивается), то повозрастные коэффициенты экономической активности всего населения уменьшаются на 5%; если рост прекращается ($r=0$), а число детей на одну женщину уменьшается, то повозрастные коэффициенты увеличиваются на 5%, при отрицательном же росте населения ($r=-0{,}01$) — на 8% по сравнению с исходными величинами при $r=0{,}01$ (все цифры, разумеется, условные). Тогда получаем следующие численности работников на 100 человек населения $C(r, x)$ — те же, что и в табл. 3).

Таблица 4

Возрастные группы x	$r=0{,}02$		$r=0{,}01$		$r=0$		$r=-0{,}01$	
	$\xi(r,x)$	$L(r,x)$	$\xi(r,x)$	$L(r,x)$	$\xi(r,x)$	$L(r,x)$	$\xi(r,x)$	$L(r,x)$
15—19	60,8	5,65	64,0	5,22	67,2	4,57	69,1	3,70
20—24	77,0	6,42	81,0	6,24	85,1	5,74	87,5	4,89
25—29	78,9	5,89	83,0	6,02	87,2	5,82	89,6	5,21
30—34	77,9	5,20	82,0	5,59	86,1	5,68	88,6	5,37
35—39	77,0	4,59	81,0	5,18	85,1	5,54	87,5	5,49
40—44	74,1	3,93	78,0	4,66	81,9	5,24	84,2	5,46
45-49	70,3	3,30	74,0	4,11	77,7	4,86	79,9	5,32
50—54	62,7	2,57	66,0	3,37	69,3	4,19	71,3	4,83
55—59	44,7	1,58	47,0	2,18	49,4	2,85	50,8	3,45
15—59		39,13		42,57		44,49		43,72

Теперь наибольшая численность работников в расчете на одну и ту же численность населения достигается при $r=0$ (стационарное население).

Однако эти результаты относятся к состоянию покоя, а не движения. Чтобы их динамизировать, надо вернуться к выражению (41) при $t \neq 0$. Зависимость P от t и r для стабильного населения известна:

$$P(t, r) = e^{rt} P(0, r) \cdot \qquad (44)$$

При $P(0, r)=1$ на основании формул (41), (43) и (44) имеем

$$L(t, r) = e^{rt} L(0, r) \cdot \qquad (45)$$

Учет фактора времени существенно изменяет выводы, которые можно сделать, рассматривая табл. 4. С течением времени численность различных стабильных населений, построенных на базе одной и той же таблицы смертности, а значит, и численность работников возрастают в различном отношении. Как видно из табл. 5, если в исходный момент при равенстве численностей населения наибольшая численность работников достигается в стационарном населении, то с течением времени наибольшие значения L перемещаются в направлении возрастания r.

Таблица 5

r	$t=0$	$t=2$ года		$t=4$ года		$t=6$ лет		$t=8$ лет		$t=10$ лет	
	$L(t,r)$	e^{rt}	$L(t,r)$	e^{rt}	$L(t,r)$	e^{rt}	$L(t,r)$	e^{rt}	$L(t,r)$	e^{rt}	$L(t,r)$
−0,01	43,72	0,961	42,01	0,923	40,35	0,887	38,78	0,852	37,25	0,819	35,81
0,00	44,49	1,000	44,49	1,000	44,49	1,000	44,49	1,000	44,49	1,000	44,49
0,01	42,57	1,020	43,42	1,041	44,32	1,062	45,21	1,083	46,10	1,105	47,04
0,02	39,13	1,041	40,73	1,083	42,38	1,127	44,10	1,173	45,90	1,221	47,78

Здесь еще преждевременно ставить вопрос о том, «лучше» или «хуже» более быстрый рост числа работников, а в связи с этим и населения. Общество интересует не численность работников сама по себе, а их совокупная отдача; последняя же зависит как от численности работников, так и от эффективности их труда, к рассмотрению которой мы и переходим.

Демографический рост и производительность труда

Мы рассмотрели в общих чертах основные линии влияния демографического фактора на численность занятого в производстве населения. Это влияние обычно достаточно хорошо осознается и, как правило, с большей или меньшей полнотой учитывается в экономических планах, проектах и прогнозах.

В значительно меньшей степени осознано и исследовано влияние демографического фактора на второй компонент производственной функции — на эффективность использования работников, производительность труда. Между тем изменения в производительности труда оказывают не меньшее влияние на рост выпуска, чем изменения в количестве используемого труда. Поэтому воздействие демографического фактора на рост производительности труда заслуживает самого серьезного внимания.

Достаточно заглянуть в любой статистический справочник, чтобы убедиться, что темп роста производительности труда от года к году меняется очень мало. Если предположить, что производительность труда увеличивается с постоянным темпом роста ρ, то

$$\varepsilon(t) = e^{\rho t} \tag{46}$$

и соответственно на основании формулы (37)

$$Q(t) = a_0 e^{\rho t} L^{\alpha}(t). \tag{47}$$

Теперь следует рассмотреть, как влияет на темп ρ интересующий нас демографический фактор.

Может показаться странным, что мы говорим о показателе производительности труда как о компоненте производственной функции, в то время как этот показатель отсутствует в выражении (47). На самом же деле отсутствует лишь показатель уровня производительности труда в исходный момент, который нас и не особенно интересует, поскольку мы рассматриваем не состояние, приуроченное к какому-то моменту, а движение. Мы просто приравниваем этот исходный уровень к 1 и, предположив, что он изменяется по экспоненте, исследуем скорость этих изменений. Показатель скорости изменений производительности труда ρ и интересует нас.

Вообще говоря, ρ — темп роста производительности труда, зависящий от любых сдвигов интенсивного характера, не связанных с изменением количества используемых ресурсов (в данном случае труда), но мы не предполагаем здесь никаких технических или организационных нововведений, если они не вытекают из демографических процессов. Иначе говоря, предполагается, что некоторый показатель ρ (часто называемый в литературе показателем темпа технического прогресса) может изменяться только под влиянием демографических факторов, и исследуется, существует ли такое влияние, и если существует, то в чем оно проявляется. А так как, оперируя моделью стабильного населения, мы все демографические характеристики в конечном счете сводим к одному показателю — темпу роста населения, истинному коэффициенту естественного прироста r, то вопрос сводится к тому, можно ли темп технического прогресса рассматривать в качестве функции r

$$\rho=\rho(r) \qquad (48)$$

и каков конкретный вид этой функции или по крайней мере общий характер зависимости.

Можно предположить два основных канала, через которые осуществляется влияние демографического фактора на изменения в производительности труда: непосредственно через темп роста населения и через изменения в его структуре.

Более высокий темп роста населения, несмотря на порождаемые им же некоторые противодействующие факторы, в целом означает и более высокий темп роста численности работников. Поскольку здесь все еще предполагается неизменная фондовооруженность труда, темпы изменения численности работников одновременно характеризуют и темпы изменения величины производственных фондов, а также (если исключить нереалистичное предположение о том, что производительность труда падает быстрее, чем растет численность работников) и темп роста выпуска. Но уже давно подмечено, что имеется определенная положительная связь между темпами роста объема производства и темпами роста производительности труда («закон Вердоорна» — по имени голландского эконометриста П. Дж. Вердоорна, впервые обратившего внимание на это явление). «Речь идет о ваимосвязи динамической, а не статистической между темпами изменения производительности и производства, но не между *уровнем* производительности и *масштабами* производства. И это прежде всего потому, что указанная зависимость отражает воздействие технического прогресса, а не только влияние крупномасштабного производства»[19].

Связь динамики производительности труда с темпом роста выпуска находит простое объяснение в процессах обновления производственного аппарата. Предположим, например, две отрасли промышленности, производственные фонды которых амортизируются ежегодно на 5%,

---

[19] *Н. Калдор.* Причины низких темпов экономического роста Великобритании. — «Мировая экономика и международные отношения», 1968, № 3, с. 79.

в связи с чем 5% наличных фондов ежегодно заменяются новыми. Кроме того, пусть первая отрасль увеличивает свои фонды ежегодно на 5%, а вторая — на 10%. Тогда в первом случае парк производственных фондов будет постоянно иметь в своем составе 9,5% новейших средств производства последнего года выпуска, а во втором — 13,6%. Через 10 лет сохранится только половина фондов, действовавших к началу исходного года, а общая величина их увеличится в первом случае до 163 единиц вместо каждых 100 в исходном году, а во втором случае — до 259. Доля старых фондов, функционировавших к началу десятилетия в первом случае составит 33%, во втором — всего немногим более 19%. Учитывая высокие темпы технического прогресса, быстрое изменение качественных характеристик производственных фондов, вполне естественно ожидать, что при прочих равных условиях выпуск продукции будет расти быстрее в той отрасли, в которой более энергично происходят процессы обновления производственного аппарата. Этот вывод относится и ко всей экономике в целом: более быстрое обновление производственного аппарата увеличивает темпы роста выпуска на единицу затрат.

Аналогичные соображения могут быть развиты и в отношении обновления рабочей силы. Непрерывный прогресс материальных производительных сил не может происходить безболезненно, если нет необходимого соответствия между интенсивностью процессов обновления производственного аппарата и рабочей силы. Здесь с гораздо большим основанием, чем при статическом анализе, можно подчеркнуть важность всесторонней мобильности рабочей силы с точки зрения роста ее квалификации, лучшего распределения по отраслям и объектам, словом мобильности, направленной на пользу общества. К. Маркс писал о промышленности, что «посредством внедрения машин, химических процессов и других методов она постоянно производит перевороты в техническом базисе производства, а вместе с тем и в функциях рабочих и в общественных комбинациях процесса труда. Тем самым она столь же постоянно революционизирует разделение труда внутри общества и непрерывно бросает массы капитала и массы рабочих из одной отрасли производства в другую. Поэтому природа крупной промышленности обусловливает перемену труда, движение функций, всестороннюю подвижность рабочего... Сама крупная промышленность своими катастрофами делает вопросом жизни и смерти признание перемены труда, а потому и возможно большей многосторонности рабочих, всеобщим законом общественного производства, к нормальному осуществлению которого должны быть приспособлены отношения... «Ne sutor ultra crepidam!» [«Сапожник, знай свои колодки!»]. Эта nec plus ultra [вершина] ремесленной мудрости превратилась в ужасную глупость с того момента, когда часовщик Уатт изобрел паровую машину, цирюльник Аркрайт — прядильную машину, рабочий-ювелир Фултон — пароход»[20].

Современная научно-техническая революция ускоряет «перевороты в техническом базисе производства, а вместе с тем и в функциях рабочих, и в общественных сочетаниях процессов труда». Быстрое обновление производственного аппарата, о котором говорилось выше, высокие темпы научно-технического и организационного прогресса производства, постоянное возникновение новых технических направлений, новых отраслей и другие процессы, интенсивность которых находится в прямой связи со скоростью всего экономического развития, требуют соответствующих масштабов и темпов изменений в профессиональной и квалификационной структуре трудовых ресурсов. Частично эти изменения происходят внутри уже функционирующих трудовых ресурсов, но это в достаточной степени сложный часто болезненный процесс. Гораздо более простой и эффективный путь — пополнение армии работающих молодежью, подготовленной уже в соответствии с новейшими структурными требованиями. Именно поэтому процессы экономической адаптации, приспособления структуры кадров к потребностям народного хозяйства протекают тем более эффективно, чем быстрее обновляется эта структура, чем выше в ней удельный вес групп, сформированных с учетом новейших экономических требований. Но при прочих равных условиях структура трудовых ресурсов обновляется тем быстрее, чем моложе работающее население.

С проблемой приспособления к структурным изменениям в экономике тесно связана проблема быстрого старения знаний. Чем выше темпы научно-технического прогресса, тем быстрее стареют знания и тем, следовательно, больше потребность в быстром обновлении кадров, в интенсивном притоке нового пополнения, владеющего современными знаниями.

[20] *К. Маркс* и *Ф. Энгельс.* Соч., т. 23, с. 498—499.

В экономической литературе отмечается определенное противоречие между темпами обновления материально-вещественной структуры производства и профессионально-квалификационной структуры работников, перестройка которой несколько запаздывает. «Все более важной причиной лага запаздывания становится «человеческий фактор»: медленное приспособление работников к использованию, обслуживанию, ремонту новейших сложных технических средств (например, средств автоматизации)»[21]. Очевидно, что сдерживающее влияние «человеческого фактора» на технический прогресс усугубляется в условиях более медленного роста населения.

Все сказанное означает, что более быстрый рост производства и более высокие темпы научно-технического прогресса предъявляют повышенные требования к структуре всего занятого населения в целом и если эти требования не выполняются, то структура населения может играть тормозящую роль в процессе экономического роста. Речь идет, конечно, не только о демографической структуре, и даже не о ней в первую очередь, но при прочих равных условиях и демографическая структура может играть немалую роль.

В целом, следовательно, имеется целый ряд соображений, которые дают основания рассматривать гипотезу о положительном влиянии более быстрого роста населения на темп технического прогресса и полагать, что $\rho(r)$ — возрастающая функция, по крайней мере на определенном участке изменений r. По всей вероятности, на этом участке находится большинство значений среднегодового темпа прироста населения, наблюдаемых сейчас в тех странах, где технический прогресс является наиболее важным фактором экономического развития. Именно там наблюдаются низкие темпы роста населения и наиболее «вязкая» возрастная структура, недостаточный приток молодежи, постарение кадров — явления, в какой-то мере противостоящие энергичному техническому и организационному прогрессу.

[21] «Экономика и математические методы», 1969, т. V, 3, с. 339.

С другой стороны, можно представить себе и такую ситуацию, когда угрозой темпу технического прогресса является не слишком медленный рост населения и вытекающая из него слишком старая структура производительного населения, а, наоборот, слишком быстрый рост населения и, как следствие, слишком молодая структура. Преемственность поколений является обязательным условием всякого прогресса, и приток молодежи должен происходить с такой скоростью, чтобы молодежь успевала усвоить опыт и знания, накопленные предшественниками. В очень быстро растущем населении на каждого работника старшего возраста приходится несколько молодых, затрудняются условия непосредственного соприкосновения между «учителями» и «учениками», каждое новое поколение не успевает воспринять все достигнутое ранее и прогресс сменяется топтанием на месте.

Иначе говоря, можно предположить существование такого участка изменений r, на котором $\rho(r)$ превращается из возрастающей в убывающую функцию. Подобная ситуация возможна в странах с очень высоким темпом роста населения, например в развивающихся странах. Надо, однако, сказать, что уровень развития производительных сил в этих странах еще недостаточно высок и технический прогресс не играет здесь той роли, которую он имеет в развитых странах. С другой стороны, здесь имеются гораздо более ощутимые отрицательные последствия слишком быстрого роста населения, которые отодвигают влияние, испытываемое темпом технического прогресса, на второй план.

Но теоретически можно допустить, что в искусственных условиях той модели, которая здесь рассматривается, функция $\rho(r)$ не является монотонной, а вначале возрастает с возрастанием r, затем же, достигнув максимума, начинает убывать. Темп роста населения r, при котором $\rho(r)=\max$, с точки зрения динамики темпа технического прогресса является оптимальным.

В заключение этого раздела следует сказать несколько слов о влиянии экзогенных демографических переменных на одноресурсную динамическую производственную функцию в целом. В соответствии с формулами (41), (47) и (48) она приобретает вид

$$Q(t,r)=a_0e^{\rho(r)t}L^{\alpha}(t,r). \qquad (49)$$

Естественно, что при рассмотрении производственной функции надо стремиться к таким значениям r, которые обеспечивают желаемое поведение не ее отдельных компонентов — L или ρ, а всей функции в целом. Если мы стремимся максимизировать $Q(t,r)$, то нас интересуют не частные оптимумы r, при которых достигаются максимумы L или ρ, а более общий оптимум, который может не совпадать ни с одним из частных. Поясним это на схематическом примере. Значения $L(t,r)$ возьмем из табл. 5, для простоты расчета принято, что эффект масштаба отсутствует ($\alpha=1$):

Таблица 6

r	$\rho(r)$	$t=0$	$t=2$		$t=4$		$t=6$		$t=8$	
		$Q(t,r)$	$e^{\rho(r)t}$	$Q(t,r)$	$e^{\rho(r)t}$	$Q(t,r)$	$e^{\rho(r)t}$	$Q(t,r)$	$e^{\rho(r)t}$	$Q(t,r)$
−0,01	0,026	43,72	1,053	44,33	1,110	44,79	1,169	45,33	1,231	45,85
0,00	0,028	**44,49**	1,058	**47,07**	1,119	49,78	1,183	52,63	1,251	55,66
0,01	0,030	42,57	1,062	46,11	1,127	**49,95**	1,197	**54,13**	1,271	58,59
0,02	0,032	39,13	1,066	43,42	1,137	48,19	1,212	53,45	1,292	**59,30**

Оценить результаты сделанного расчета невозможно, не уточнив критерий оптимальности. Недостаточно сказать, что мы стремимся максимизировать выпуск $Q(t,r)$, надо еще оговорить период времени, в течение которого должен быть получен этот максимальный выпуск, потому что, как и следовало ожидать и как явствует из табл. 6, с течением времени максимум перемещается в направлении возрастания r.

Предположим, что мы выбрали в качестве периода оптимизации 4-летний срок (такой маленький период можно рассматривать только в иллюстративном примере, в действительности оптимизация демографических процессов может иметь смысл только в пределах длительных промежутков времени — не менее нескольких десятилетий). Через 4 года наибольшая численность работников достигается при стационарном населении (см. табл. 5). Наиболее высокий темп технического прогресса соответствует стабильному населению, растущему на 2% в год. Но с точки зрения общего выпуска наилучшим является население, растущее на 1% в год, иначе говоря, с точки зрения поставленной цели истинный коэффициент естественного прироста $r=0,01$ является оптимальным.

Ранее, при статическом анализе, было рассмотрено понятие оптимальной численности населения. При динамическом подходе оно в значительной степени утрачивает смысл, уступая место понятию оптимального темпа роста населения. Это понятие было введено в научный оборот значительно позднее понятия статического оптимума, о котором писалось выше. Применительно к производственной функции оно означает, что если выбран срок оптимизации и сформулированы цели в отношении выпуска, то темп роста населения, при котором при прочих равных условиях эти цели достигаются наиболее полно, является оптимальным. Очевидно, что как оптимальная численность населения, так и оптимальный темп роста населения являются теоретическими понятиями и что было бы большим заблуждением пытаться исчислить их действительные величины. «Прочих равных условий» в действительности никогда не существует, а достаточно полный учет прочих неравных условий, влияющих на поведение производственной функции, вероятно, невозможен, во всяком случае при современном уровне экономических знаний. ?

Но в теоретическом анализе понятия оптимальной численности и оптимального темпа оказываются очень полезными, потому что они позволяют сконцентрировать исследование проблемы вокруг единого логического стержня, дают точку опоры, отталкиваясь от которой легче вести изучение вопроса и доступно излагать результаты.

Двухресурсная динамическая производственная функция

Использование одноресурсной производственной функции оправдано только в том случае, если соотношение между производственными ресурсами все время остается неизменным. В ходе нашего анализа это условие до сих пор соблюдалось: предполагалось, что в производстве участвуют ресурсы только двух видов (труд и производственные фонды) и что соотношение между количествами этих ресурсов или между темпами их изменений остаются неизменными. Хотя такая предпосылка и является в высшей степени условной, она может быть оправдана ссылкой на принцип «ceteris paribus», часто используемый в экономическом анализе, когда хотят выяснить влияние какого-нибудь одного фактора при прочих равных условиях. Однако в данном случае предпосылка о неизменности соотношения между производственными ресурсами оказывается несовместимой с другим требованием, которое предполагается нашим анализом,— с требованием экзогенности демографических переменных. В свете этого требования в качестве независимых переменных могут рассматриваться только демографические переменные либо такие экономические переменные, в отношении которых есть достаточно веские основания утверждать, что они не зависят от демографических факторов. Но в отношении производственных ресурсов этого утверждать ни в коем случае нельзя.

Уже при статическом анализе упоминалось о том, что наряду с исходным положением о неизменной ресурсовооруженности труда возможно и другое, противоречащее первому, но не противоречащее принципу «ceteris paribus», исходное условие — неизменность общего объема производственных ресурсов (кроме трудовых). При этом условии соотношение между трудовыми и прочими экономическими ресурсами становится функцией численности трудовых ресурсов и в конечном счете демографических переменных. Но при статическом анализе можно, по крайней мере, уклониться от рассмотрения этого второго допущения, потому что ни из чего не вытекает его обязательность, равно как ни из чего не вытекает невозможность допущения одинаковой ресурсовооруженности труда, например в двух странах, в какой-то произвольно выбранный момент.

Но как только изолированное нами от общего потока времени мгновение снова становится лишь преходящим моментом непрерывного движения, как только мгновенный фотоснимок становится кадром киноленты, все условия начинают непрерывно изменяться. В результате продолжающегося производства изменяется общий объем ресурсов, но в значительной степени независимо от этого изменяется численность населения, т. е. число производителей и потребителей, а значит, и величина приходящихся на одного человека ресурсов, следовательно, и ресурсовооруженность труда.

Как видим, изменение соотношения между трудом и производственными фондами почти неизбежно вытекает из самого факта движения во времени, даже если это движение, вопреки тому что имеет место в действительности, рассматривать как совершенно нецеленаправленное (в действительности имеется определенная ориентация на повышение фондовооруженности труда).

Это обстоятельство, конечно, влияет на производственную функцию. Рост числа работников может теперь сочетаться как с увеличением, так и с уменьшением их фондовооруженности, в силу чего производственная функция в целом может одновременно, скажем, увеличиваться под влиянием роста числа работников и уменьшаться в результате снижения их фондовооруженности. Чтобы судить о результативной кривой выпуска, учитывающей оба эти противоположные движения, необходимо, следовательно, рассматривать выпуск как функцию обоих факторов: численности работников и величины фондов. Кроме того, как мы знаем, выпуск изменяется со временем под влиянием технического прогресса независимо от изменения количества используемых ресурсов. Поэтому следует рассматривать двухресурсную производственную функцию в виде

$$Q(t)=f[t, L(t), G(t)], \tag{50}$$

где G — величина производственных фондов.

С учетом формулы (50) темп роста выпуска можно записать следующим образом:

$$Q_T=\left(\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial L}\cdot\frac{dL}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial G}\cdot\frac{dG}{dt}\right)/Q=$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial t}/Q+\frac{\partial Q}{\partial L}\cdot\frac{L}{Q}\cdot\frac{L'}{L}+\frac{\partial Q}{\partial G}\cdot\frac{G}{Q}\cdot\frac{G'}{G}. \tag{51}$$

Введем обозначения:

темп роста выпуска (при условии, что L и G постоянные величины), показатель технического прогресса

$$\varepsilon(t)=\frac{\partial Q}{\partial t}/Q; \tag{52}$$

коэффициент, связывающий темп роста выпуска с темпом роста численности работников, коэффициент эластичности выпуска относительно количества труда

$$\alpha=\frac{\partial Q}{\partial L}\cdot\frac{L}{Q}; \tag{53}$$

коэффициент эластичности выпуска относительно величины производственных фондов

$$\beta=\frac{\partial Q}{\partial G}\cdot\frac{G}{Q}. \tag{54}$$

Вводя эти обозначения в формулу (51), имеем

$$Q_T=\varepsilon(t)+\alpha L_T+\beta G_T, \tag{55}$$

а после преобразований (аналогичных преобразованиям на стр. 101) получим

$$Q(t)=a_0\varepsilon(t)L^{\alpha}(t)G^{\beta}(t) \tag{56}$$

(функция Кобба—Дугласа в обобщенной форме).

Предположим, что мы снова заинтересовались эффектом масштаба производства. Если в какой-то момент (напоминаем, что эффект масштаба — эффект статический) имеются две экономики, различающиеся *только* масштабом (одна «больше» другой в n раз), то в одном случае

$$Q_1=a_0\varepsilon(t)L^{\alpha}(t)G^{\beta}(t),$$

в другом

$$Q_2=a_0\varepsilon(t)[nL(t)]^{\alpha}[nG(t)]^{\beta}=$$

$$=n^{\alpha+\beta}a_0\varepsilon(t)L^{\alpha}(t)G^{\beta}(t).$$

Понятно, что если $\alpha+\beta=1$, эффект масштаба отсутствует, если $\alpha+\beta>1$, он положителен, если $\alpha+\beta<1$ — отрицателен.

Изменения величины производственных фондов со временем зависят от многих факторов, главным образом экономических: нормы производственного накопления, роли амортизационных отчислений как фактора роста фондов, эффективности труда в отраслях, создающих производственные фонды, и т. п. Все эти условия в действительности меняются, но мы, следуя нашему общему принципу, будем считать их неизменными. Предположим, что прирост производственных фондов происходит только за счет определенной, неизменной во времени доли выпуска (если «выпуск» — народный доход, то за счет производственного накопления, норма которого $\gamma_0=$ $=\text{const}$). Тогда приращение фондов $dG(t)$ за время dt пропорционально полученному за это время выпуску

$Q(t)\,dt$, а соотношение G и L (фондовооруженность) изменяется в зависимости от поведения демографических переменных.

Пусть

$$dG(t) = \gamma_0 Q(t)\,dt, \tag{57}$$

а, учитывая выражение (56),

$$dG(t) = a_0\gamma\ \varepsilon(t)\,L_0^{\alpha}(t)\,G^{\beta}(t)\,dt\,. \tag{58}$$

Решая это дифференциальное уравнение относительно G, получаем[22]

$$G(t) = [G^{1-\beta}(0) + (1-\beta)\,a_0\gamma_0 \int_0^t \varepsilon(t)\,L^{\alpha}(t)\,dt]^{\frac{1}{1-\beta}}, \tag{59}$$

а допустив, что

$$V(t) = \frac{L(t)}{L(0)}, \tag{60}$$

имеем

$$G(t) = [G^{1-\beta}(0) + (1-\beta)\,a_0\gamma_0 L^{\alpha}(0) \int_0^t \varepsilon(t)\,V^{\alpha}(t)\,dt]^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{61}$$

Вынося $G^{1-\beta}(0)$ за скобки, учитывая, что $a_0L^{\alpha}(0)\,G^{\beta}(0) = Q(0)$, и вводя

$$D(0) = \frac{Q(0)}{G(0)}, \tag{62}$$

получаем

$$G(t) = \{G^{1-\beta}(0)\,[1 + \frac{a_0L^{\alpha}(0)\,G^{\beta}(0)}{G(0)} \times$$

22

$$\int_0^t \frac{dG(t)}{G^{\beta}(t)} = a_0\gamma_0 \int_0^t \varepsilon(t)\,L^{\alpha}(t)\,dt\,;$$

$$\int_0^t \frac{dG(t)}{G^{\beta}(t)} = \frac{G^{1-\beta}(t) - G^{1-\beta}(0)}{1-\beta}\,;$$

$$G^{1-\beta}(t) = G^{1-\beta}(0) + (1-\beta)\,a_0\gamma_0 \int_0^t \varepsilon(t)\,L^{\alpha}(t)\,dt\,.$$

$$\times (1-\beta)\,\gamma_0 \int_0^t \varepsilon(t)\,V^{\alpha}(t)\,dt]\}^{\frac{1}{1-\beta}} =$$

$$= G(0)\,[1 + D(0)\,(1-\beta)\,\gamma_0 \int_0^t \varepsilon(t)\,V^{\alpha}(t)\,dt]^{\frac{1}{1-\beta}}\,. \tag{63}$$

В соответствии с формулой (56)

$$Q(t) = a_0\varepsilon(t)\,L^{\alpha}(t)\,G^{\beta}(0)\,[1 + D(0) \times$$

$$\times (1-\beta)\,\gamma_0 \int_0^t \varepsilon(t)\,V^{\alpha}(t)\,dt]^{\frac{\beta}{1-\beta}} =$$

$$= \varepsilon(t)\,Q(0)\,V^{\alpha}(t)\,[1 + D(0)\,\gamma_0(1-\beta) \int_0^t \varepsilon(t)\,V^{\alpha}(t)\,dt]^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \tag{64}$$

Согласно формулам (45) и (60)

$$V(t) = e^{rt}\,. \tag{65}$$

Подставляя выражения (46) и (65) в формулу (64) и интегрируя, получаем

$$Q(t) = Q(0)\,e^{(\rho+\alpha r)t}\left[1 + D(0)\,(1-\beta)\,\gamma_0 \frac{e^{(\rho+\alpha r)t} - 1}{\rho+\alpha r}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \tag{66}$$

Таким образом, мы пришли к двухресурсной производственной функции, в которую в качестве экзогенной переменной введен истинный коэффициент естественного прироста, играющий в модели стабильного населения роль обобщающего показателя, отражающего различные характеристики демографических процессов.

Оставаясь, конечно, теоретической моделью со всеми вытекающими отсюда ограничениями, производственная функция в виде (66) в значительно большей степени, чем все рассмотренные ранее ее выражения, пригодна для анализа того влияния, которое оказывают на рост производства демографические факторы.

Поскольку величина совокупного выпуска не является достаточно убедительным показателем, так как не известно, ценой каких затрат получен этот выпуск, мы используем аналитические возможности модели для исследования влияния демографического фактора на рост производства в расчете на одного работника:

$$q(t) = \frac{Q(t)}{L(t)} \cdot \qquad (67)$$

Задачи оптимизации режима воспроизводства населения с точки зрения производственной функции могут быть связаны именно с этим показателем.

Естественно стремление к наиболее быстрому росту производительности труда (при стабильных условиях накопления), т. е. к тому, чтобы величина

$$i(t) = \frac{q(t)}{q(0)} \qquad (68)$$

за какой-то избранный период времени $t=\Theta$ лет была наибольшей.

Подставляя выражение (66) в формулу (67) и учитывая формулы (60) и (65), получаем

$$q(t) = q(0)\, e^{[\rho+(\alpha-1)r]t} \left[1 + D(0)(1 - \beta)\gamma_0 \frac{e^{(\rho+\alpha r)t} - 1}{\rho+\alpha r} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}, \qquad (69)$$

а подставляя (69) в (68), приходим к выражению для интересующего нас индекса:

$$i(t) = e^{[\rho+(\alpha-1)r]t} \left[1 + D(0)(1 - \beta)\gamma_0 \cdot \frac{e^{(\rho+\alpha r)t} - 1}{\rho+\alpha r} \right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}. \qquad (70)$$

Эта формула позволяет исследовать, как меняется производительность труда одного среднего работника под влиянием демографических факторов с учетом связанных с изменением темпа роста населения сдвигов в ресурсовооруженности труда, фактора технического прогресса и эффекта масштаба производства.

Она позволяет, в частности, более обоснованно (хотя и не выходя, конечно, за рамки абстрактной модели) подойти к вопросу о нижней границе темпа роста населения. Следует отметить, что встречающиеся в литературе попытки ответа на вопрос о нижнем пределе темпа роста населения часто оказываются неубедительными.

В качестве примера можно привести попытку связать темпы роста населения с темпами роста объема производства, утверждая, что население не должно расти медленнее производства, темпы роста которого в свою

очередь предопределены его сложившейся структурой; в противном случае производство начнет испытывать недостаток в людях. В действительности структура производства, в частности соотношение подразделений, не является неизменной и теоретически ничто не воспрещает изменить темп роста производства и постепенно привести структуры в соответствие с новым темпом[23].

Мы же попытаемся подойти к определению нижнего предела темпа роста населения иначе, связав его с рассмотренной выше проблемой обновления структуры населения.

Именно учет важности быстрого обновления всего производственного аппарата и значения «человеческого фактора» в этом процессе делает правомерным рассмотрение гипотезы, согласно которой темп роста производительности труда ρ при прочих равных условиях есть функция темпа роста населения r, причем, по крайней мере на определенном участке изменений r, функцией возрастающей. Опираясь на эту гипотезу, можно отыскать нижний предел изменений темпа роста населения.

Рассмотрим эту гипотезу на конкретном числовом примере. Пусть темп роста производительности труда изменяется по мере изменения r, возрастая с увеличением r и убывая с его уменьшением, как это показано в табл. 7. Примем $D=0{,}5$, $\gamma_0=0{,}24$, $d=0{,}3$, $\beta=0{,}7$, Тогда, проводя расчеты по формуле (70), получаем следующие значения $i(t)$:

Таблица 7

r	ρ	t (годы) 10	20	30	40	50
−0,01	0,026	3,08	8,71	24,02	63,37	163,03
0,00	0,028	2,97	8,46	23,33	63,05	167,47
0,01	0,030	2,88	8,17	22,80	63,40	174,95
0,02	0,032	2,79	7,90	22,53	64,56	186,07

[23] Подробнее об этом см.: *А. Г. Вишневський, З. В. Соколинський.* До питання про співвідношення демографічного й економічного зростання.— «Демографічні дослідження». Вип. 2, Київ, «Наукова думка», 1970, с. 51—53.

Из таблицы следует, что в условиях рассматриваемого примера по мере удаления от исходного момента влияние роста производительности труда, темп которого увеличивается с ускорением роста населения, становится все более ощутимым, его противодействие отрицательному эффекту более медленного роста фондовооруженности труда — все более заметным. В конце концов, этот отрицательный эффект, имеющий чисто количественную природу, нейтрализуется положительным эффектом качественных сдвигов в производстве (технического и организационного прогресса), после чего более быстрый рост производительности труда соответствует все более и более быстрому росту населения. Соответствующая картина изображена на рис. 4. При неизменном темпе роста

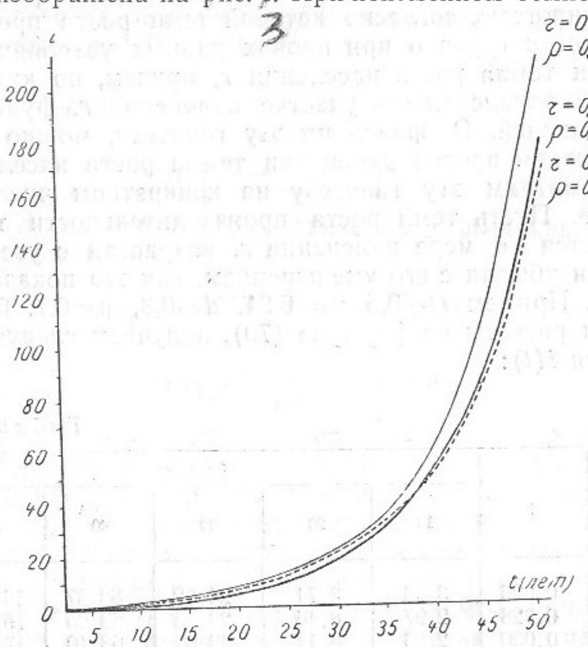

Рис. 3. Рост $i(t)$ при условии, что ρ — возрастающая функция r.

производительности труда ($\rho=0{,}030$) $i(t)$ для населения, растущего на 0,01 в год, никогда не превышает значений $i(t)$ для стационарного населения. Но если в случае стационарного населения ниже не только темп роста на-

селения, но и темп технического прогресса ($\rho=0{,}028$), то начиная с какого-то времени (в данном случае примерно через 38 лет) кривая, соответствующая растущему населению, пересекает кривую, соответствующую стационарному населению, и в дальнейшем поднимается более круто. Иначе говоря, если более быстрый рост населения способствует ускорению темпа технического прогресса, то рано или поздно более высокий темп роста производительности труда начинает соответствовать и более быстро растущему населению. В этих условиях, следовательно, обнаруживаются отрицательные последствия *снижения* темпа роста населения, подобно тому как в другой ситуации обнаруживаются отрицательные последствия его *повышения*.

Установив наличие противоположных тенденций в изменении индексов роста производительности труда, вытекающих из одного и того же явления — замедления или ускорения роста населения, мы можем снова поставить вопрос об оптимальном темпе роста населения. Постановка такого вопроса предполагает фиксирование срока оптимизации и четкой формулировки критерия оптимальности. Вероятно, нет смысла стремиться к такому темпу роста населения, при котором индекс роста производительности труда через заданное число лет окажется наибольшим, потому что нет никаких оснований пренебрегать поведением этого индекса за весь предшествующий период. Только из того, например, что через 40 лет (предположим, что выбран именно такой срок оптимизации) $i(t)$ для растущего населения окажется выше, чем для стационарного, еще не следует, что надо стремиться к растущему населению, если на протяжении 38 из 40 лет рассматриваемого срока более высокие значения соответствовали стационарному населению.

Более целесообразно стремиться к максимизации величины среднего индекса роста производительности труда за Θ лет

$$\overline{i(t)}=\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} i(t)\,dt\,. \qquad (71)$$

Будучи умноженной на исходную величину выпуска в расчете на одного работника $q(0)$, эта величина дает среднегодовой выпуск на одного работника за Θ лет:

$$\overline{q(t)}=q(0)\,\overline{i(t)}\,. \qquad (72)$$

В нашем примере средний индекс роста производительности труда $i(t)$ за 40 и за 50 лет будет следующим (интеграл вычислен на основании данных табл. 7 по формуле Симпсона):

Таблица 8

r	ρ	$t=40$	$t=50$
—0,01	0,026	15,85	33,69
0,00	0,028	15,51	33,79
0,01	0,030	15,27	34,31
0,02	0,032	15,22	35,12

Таким образом, при 40-летнем сроке оптимизации (и при принятых исходных данных) оптимальным является отрицательный темп роста населения, при котором население убывает на 1% в год. Если же в качестве периода оптимизации избран 50-летний срок, оптимальным оказывается темп роста, при котором население увеличивается на 2% в год.

Следовательно, даже если более быстрый рост населения влечет за собой не только отрицательные (замедление роста ресурсовооруженности труда), но и положительные (ускорение технического прогресса) последствия, чтобы эти положительные последствия могли проявиться, требуется время; положительный эффект не может быть получен немедленно; идя по пути быстрого роста населения, общество сознательно или бессознательно соглашается на отсрочку его реализации. Период этой отсрочки зависит от целого ряда условий, в частности от величины r и от конкретного вида функции $\rho(r)$.

Мы ограничили наш анализ рассмотрением двухресурсной производственной функции, в которой в качестве основных видов ресурсов рассматривались труд и производственные фонды. При этом под производственными фондами понимались воспроизводимые фонды в вещественной форме. В действительности рост населения не может не приводить к изменению обеспеченности одного работника невоспроизводимыми ресурсами (вода, земля, полезные ископаемые), а также такими «нематериальными» видами ресурсов, как запас знаний (потому

что получение знаний связано с вполне материальными условиями). Для учета более широкого круга экономических ресурсов понадобился бы переход к многоресурсной производственной функции. Такой переход не внес бы, вероятно, принципиальных изменений в полученные нами выводы, и в этой статье многоресурсная производственная функция не рассматривается. Но если бы речь шла о статистической работе, в которой изучались бы количественные взаимосвязи между ростом населения и ростом производства, то рассмотрение связей и соотношений между демографическими изменениями и изменениями количеств различных видов экономических ресурсов и, следовательно, рассмотрение многоресурсной производственной функции было бы необходимым или, во всяком случае, весьма желательным.

4. Заключение

Взаимосвязи между демографическими и экономическими явлениями издавна привлекают внимание научной мысли, но и сегодня еще мы не располагаем цельной и убедительной теорией демоэкономических процессов. Между тем проблемы демоэкономического характера не только существуют в современном мире, но их актуальность даже возрастает.

С одной стороны, среди большей части населения земного шара рост численности населения протекает такими темпами, которые намного превосходят известные ранее. Неизбежно возникает вопрос о том, как сказывается этот чрезвычайно быстрый рост на экономическом развитии многих стран, стремящихся преодолеть вековую отсталость, но располагающих ограниченными экономическими ресурсами. Как сочетаются положительные и отрицательные последствия роста населения в этом случае? Имеется ли *верхний* предел темпа роста населения, переход через который приводит к неизбежному «проеданию» наличных ресурсов и делает экономический рост невозможным или, по крайней мере, сильно тормозит его? К какому темпу роста населения следовало бы стремиться развивающимся странам?

С другой стороны, во многих странах происходит (или произошло) резкое замедление роста населения. Каковы экономические последствия такого характера демографического развития? Каково здесь соотношение положительных и отрицательных последствий? Можно ли говорить о *нижнем* пределе значений темпа роста населения?

Еще в начале XX в. буржуазные экономисты придерживались преимущественно мальтузианских воззрений на рост численности населения, что можно видеть на примере того же Викселля (см. стр. 80). Но уже в 30-е годы новые явления заставили их и по-новому взглянуть на проблемы. В 1938 г. в своем президентском послании Американской экономической ассоциации под названием «Экономический прогресс и замедляющийся рост населения» американский экономист Элвин Хансен писал: «Воспитанные в традиции мальтузианской теории экономисты, мыслящие в терминах статической экономики, оптимистически истолковывают прекращение роста населения... Но было бы ничем не оправданным оптимизмом отрицать, что существуют вытекающие из резкого перехода от быстрого роста населения к его прекращению серьезные структурные неполадки (maladjustments), которых можно избежать или которые легко можно смягчить, только если проводить соответствующую изменившейся ситуации экономическую политику»[24]. Хансен отводил важное место влиянию населения на экономику, причем он, по словам Селигмена, «... в каком-то смысле перевернул классическую проблему: в то время как Рикардо и Мальтус выражали беспокойство в связи с возможностью опережающего роста населения по сравнению с наличными ресурсами, он считал, что для создания развитой экономики необходим более быстрый рост населения»[25].

Мысль о том, что слишком медленный рост населения может иметь отрицательные экономические последствия, высказывалась, конечно, и раньше, в частности демографами. Впоследствии же она получила широкое распространение среди экономистов, которые не раз пытались выявить конкретные достоинства и недостатки, вытекающие из того или иного режима воспроизводства населения.

[24] *А. Н. Hansen.* Economic progress and declining population growth. Population theory and policy. Selected readings. Glencoe, 1956, p. 257.

[25] *Б. Селигмен.* Основные течения современной экономической мысли. М., «Прогресс», с. 454.

Но это оказалось нелегкой задачей. В целом предположение о том, что более быстрый рост населения в развитых капиталистических странах может способствовать более быстрому экономическому росту, остается лишь гипотезой, которую пока никому не удалось доказать. В 1958 г. С. Кузнец в специальном докладе на конференции, посвященной экономическим и демографическим изменениям в развитых капиталистических странах, попытался рассмотреть вопрос об экономических преимуществах быстрого роста населения. «У меня сложилось впечатление, — заявил он в начале доклада, — что новейшая специальная (и популярная) литература особо подчеркивает отрицательные стороны и опасности роста населения — истощение невоспроизводимых ресурсов, ухудшение условий накопления капитала, организационных возможностей общества и т. п. ... Я предлагаю рассмотреть положительный вклад роста населения, полагая, что он, в конце концов, должен перевесить отрицательный эффект»[26]. Но этим намерениям не суждено было осуществиться. На последних страницах доклада можно прочесть, что, даже если говорить о развитой экономике, «главный вопрос нашей дискуссии, как и большинства исследований в области отношений между демографией и экономикой, остается открытым»[27].

«Мы не знаем, — пишет Кузнец, — как много — слишком много и как мало — слишком мало. У нас нет даже приблизительных эмпирических данных для того, чтобы взвешивать различные положительные и отрицательные стороны роста населения. Хотя мы, возможно, способны отличить выигрыш от проигрыша, мы редко знаем характер функции, которая связывает их с различными значениями роста населения»[28].

Возвращаясь снова, уже в 1965 г. в Белграде, к этому же вопросу, Кузнец говорит, что «ответом на этот вопрос неизбежно будут лишь умозрительные суждения, основанные на всестороннем применении неполных зна-

[26] *S. Kuznets.* Population change and agregate output. Demographic and economic change in developed countries. Princeton, 1960, p. 325.

[27] Ibid, p. 339.

[28] Ibid.

ний[29]. Но в то же время он утверждал: «Это не означает, что нельзя получить гораздо больших знаний о количественных соотношениях между демографическими тенденциями и экономическим ростом путем систематического изучения данных, относящихся к широкому диапазону времени и пространства. В самом деле, экономисты, пренебрегая демографическими аспектами... в ... количественных исследованиях экономики, и демографы, пренебрегая экономическими аспектами... в ... количественных исследованиях населения, незаслуженно ограничили систематический количественный анализ взаимоотношений между этими двумя группами тенденций; а объем данных можно увеличить, чтобы обеспечить гораздо более широкую основу для в общем надежных выводов»[30].

Эти «в общем надежные выводы» представляют, конечно, первостепенный интерес и для демографов и экономистов, занимающихся изучением аналогичных проблем в нашей стране, тем более что именно в условиях плановой экономики учет будущих экономических последствий демографического развития является наиболее важным. Поэтому, несмотря на обоснованный скептицизм в отношении наших сегодняшних знаний о механизме демоэкономического взаимодействия, необходимо всячески развивать работу по его изучению, нащупывая наиболее перспективные направления исследований.

Настоящая статья представляет собой попытку такого изучения. Она посвящена ограниченному вопросу — воздействию демографических процессов на производство и, конечно, не претендует на его исчерпывающее решение. Мы попытались лишь изложить и обосновать несколько относящихся к рассматриваемому вопросу гипотез, которые, может быть, окажутся полезными при дальнейшем развитии демоэкономических исследований.

---

[29] *С. Кузнец.* Демографические аспекты современного экономического роста. — В сб. «Население и экономика». М., «Статистика», 1970, с. 122—123.

[30] Там же, с. 141—142.

ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка сверху*	*Строка снизу*	*Напечатано*	*Следует читать*
31	15		в '$(1+x \quad \int_{\infty}^{0} \lambda(x)\,dx$	$x+1)$, а $\int_{0}^{\infty} \lambda(x)\,dx$
32	6		$\iint\limits_{\Delta ABC} \mu^{1}(x,t)\,dxdt$	$\iint\limits_{\Delta ABC} \mu'_{t}(x,t)\,dxdt$
33	3		$p(x_1, x_2) = {}_{x-x_1}p(x_1)$	$p(x_1, x_2) = {}_{x_2-x_1}p(x_1)$
71		17	$\overline{x}$	x
71		15	x	$\overline{x}$

Сб. «Модели демографических связей». М., «Статистика», 1972.