О ПРИНЦИПАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ СУЩНОСТИ ПРОЦЕССОВ СМЕРТНОСТИ[1]

Процесс воспроизводства населения представим пространственно-временными потоками внешне однородных локализованных единичных явлений — рождений, смертей. При обычном для демографии статистическом методе анализа таких процессов имеют дело с теми или иными достаточно большими совокупностями, каждая из которых характеризуется своей численностью. В статистическую совокупность объединяются индивиды, обладающие тем или иным признаком (например, умершие в возрастном интервале $[x, x+1]$).

В общем смысле индивиды любой демографической совокупности, будучи функциональными элементами социального целого, связаны между собой. Но объединение их в статистическую совокупность, даже если оно производится по нескольким при-

---

[1] Впервые опубликовано: Продолжительность жизни: анализ и моделирование. М., 1979. С. 104—123.— *Ред.*

знакам (многомерная классификация), обычно не делает такую совокупность системой, так как образующие ее элементы, если их рассматривать только в рамках вычлененных формальных признаков, непосредственно почти не взаимодействуют. Таким образом, обычные демографические совокупности — это искусственные, воображаемые конгломераты. Их описание (количественное, качественное) фиксирует лишь те или иные моменты, стороны сложнейшего социально-экономического развития общества, что, впрочем, никак не умаляет значения статистического «прослеживания», его важности по крайней мере для краткосрочного оперативного управления социально-экономическими процессами общества, хотя и оставляет в значительной мере открытым вопрос о сущности регистрируемых явлений.

Пусть известна статистика некоторой совокупности однородных явлений, различающихся по какому-либо признаку. Используя те или иные формальные приемы, мы упорядочиваем эту статистику, например строим эмпирическую функцию распределения $\tilde{F}(x)$ числовой меры признака.

Форма $\tilde{F}(x)$ является отражением закономерностей, которые принято называть статистическими. Поскольку, как отмечалось, реальные взаимодействия между элементами демографических совокупностей слабы, форма $\tilde{F}(x)$ есть следствие индивидуальных процессов развития, механической процедуры их смешивания, а также трудно оцениваемого в количественных показателях общего для всех комплекса Ω социально-психологических и экономических условий.

Опыт показывает, что в течение длительных исторических периодов наблюдается значительная устойчивость формы кривых $\tilde{F}(x)$ или функционально связанных с ними характеристик для определенного типа явлений.

Примером такой устойчивости служит форма кривой силы смертности $\lambda(x)$ (в демографической литературе обозначаемой обычно $\mu(x)$) в целом для всего диапазона возрастов x, особенно для x старше 25—30 лет. Теоретически, как известно, $\lambda(x) = -l'(x)/l(x)$, где функция выживания $l(x) = 1 - F(x)$, а $F(x)$ — функция распределения длительности жизни реального (продольного) или условного (поперечного) поколения. Несмотря на всевозможные аномалии и отклонения, качественные характеристики формы кривых $\lambda(x)$ довольно стабильны. Можно допустить, что эта стабильность связана с устойчивостью или относительно медленными изменениями во времени основных биосоциальных механизмов смертности, и поставить вопрос об их адекватном математическом моделировании.

В качестве первого предварительного шага в этом направлении можно пытаться подобрать (хотя бы чисто формально) тип распределения $F(x, \Theta)$ так, чтобы историческая эволюция или региональные различия отражались бы лишь в качественном изменении векторного параметра $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$. Естественно, что с эволюцией $\Theta(t)$ при фиксированном типе распределения $F(x, \Theta)$ частотные характеристики смертности (скажем, распределение умерших по возрасту), как правило, изменяются. Поэтому более правильно искать закономерное, сущностное *в формах* распределения $F(x, \Theta)$, а не в их числовых характеристиках, как пытался в свое время делать А. Кетле.

Однако нахождение устойчивого типа распределения $F(x,\Theta)$ — это лишь первый и достаточно простой шаг, особенно если устойчивость уловлена внешними, формальными приемами, например аппроксимациями эмпирических $\tilde{F}(x)$. Второй шаг должен, по нашему мнению, заключаться в построении теории механизма смертности, взаимосогласованном моделировании ряда латентных, формирующих явление процессов (социально-экономических, социально-биологических, общебиологических).

В такой теории должен быть прежде всего сконструирован логический каркас, скелет, из которого и вытекает тип распределения $F(x, \Theta)$. При этом следует иметь в виду, что один и тот же факт может быть логически удовлетворительно описан различными, по крайней мере во внутренних деталях, теориями, что связано с необходимостью осмысления латентных, непосредственно не проявляющихся или трудно наблюдаемых факторов. Поэтому наряду с разработкой логической конструкции теории требуется и разработка инспекционного фильтра, позволяющего оценивать соответствие как исходных концепций, так и логически допустимых внутренних деталей теории наблюдаемым фактам. Чтобы такой фильтр был эффективным, инспектируемая теория должна обладать достаточной внутренней (в частях) логической избыточностью (допускать внутренние перестройки с сохранением типа $F(x, \Theta)$, а также и возможность обобщения, расширения самого типа $F(x, \Theta)$. Вместе с тем внешняя (в целом) логическая избыточность должна быть минимальна за счет отбора основной исходной концепции. Здесь слово «внешняя» используется для обозначения основных логических контуров теории, выбор которых — всегда первичный этап в работе исследователя. Естественно, что логика модели, отражающей сущность явления в целом, «неделима».

Изложим и методически систематизируем наш подход к построению теорий смертности (естественнонаучных, социально-психологических). Значение понимания процессов, лежащих в основе смертности, и управления ими бесспорно на всех уровнях — индивидуальном и коллективном, внеэкономическом и экономическом. При этом рациональный подход к проблеме смертности не сводится только к поискам биофизических и биосоциальных закономерностей старения в больших статистических коллективах. Хотя такие поиски могут быть основными (в частности, для нас), следует отдавать себе отчет в неизбежности соприкосновения на этом пути с огромным наследием философских концепций, мироощущений, прямо или косвенно связанных с различием отношений к смерти — финалу индивидуального развития личности.

Идея управления процессами смертности связывается обычно (в явной или неявной форме) не с достижением физического бессмертия, а с отодвиганием смертности к возможно более поздним возрастам, с заменой «преждевременной» смертности «своевременной». Понятно, однако, что достаточно широко поставленный вопрос о «своевременности» смерти не может решаться только в зависимости от числа прожитых лет. Неизбежно возникает проблема смысла прожитой жизни, ее наполненности и т. п. Многообразие отношений к этой проблеме, по крайней мере в психологическом плане, реально отражается в многообразии литературно-философских концепций перехода от жизни к смерти, что прослеживается от древнеегипетских поэм, Сенеки, Марка Аврелия до Л. Н. Толстого, Сартра, Камю и т. д. Мы далеки от мысли, чте естественнонаучные математизированные теории, по необходимости пренебрегающие индивидуальным, личностным (особенно это относится к статистическим теориям больших систем), могут конкурировать в ценностных, информационных аспектах с художественными текстами, часто яркими, тонкими, неповторимыми. Но нам хотелось бы подчеркнуть, что и результаты математического анализа могут выполнять существенную дополнительную функцию в осознании конечности индивидуального бытия, процесса приближения к его границе, избавляя, как говорил Курно, «от излишнего страха и неосновательных надежд». Во всяком случае, интересно — особенно для сторонников математической экспансии в науке,— что некоторые неоднократно высказывавшиеся, но имеющие интуитивную основу представления ценностного характера, многие привычные элементы жизнеощущения допускают определенные формально-логические уточнения. Например, проследим мысленно судьбу некоторой достаточно многочисленной когорты ровесников. В любой момент x (за 0 принимаем общий год рождения) любой член когорты относится либо ко множеству мертвых, либо ко множеству живых.

Первое множество характеризуется средней длительностью ${}_0E(x)$ реализованной жизни, второе — средней потенциальной длительностью ${}^0E(x)$ жизни (прожитые годы + предстоящий остаток). Вторая характеристика — классическая для демографии и известна почти сто лет:

$$ {}^0E(x) = x + e_x = x + \frac{1}{l(x)} \int_x^\infty l(z)\, dz. \qquad (1) $$

Геометрически ${}^0E(x)$ — площадь $xl(x)$ плюс площадь под кривой $l(y)$ в интервале $[x, \infty]$, деленная на долю живущих в возрасте $y = x$, т. е. на $l(x)$ (рис. 1).

Первая же характеристика менее известна, однако без труда вычисляется через функцию выживания $l(y)$. Это просто площадь под графиком $l(y)$ в интервале $[0, x]$ выше

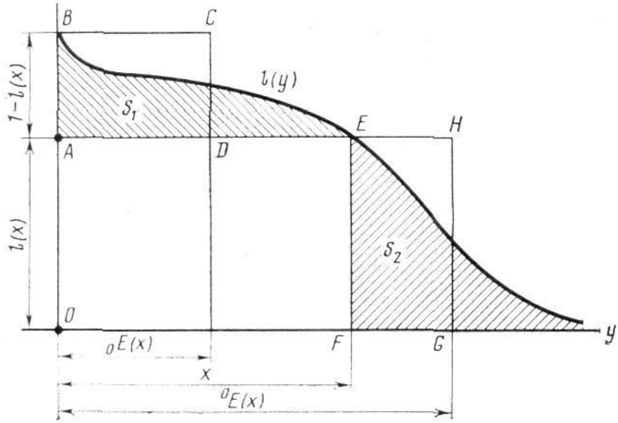

Рис. 1. Средняя продолжительность жизни совокупности умерших ${}_0E(x)$ в интервале 0, x и средняя продолжительность жизни совокупности живых ${}^0E(x)$ в момент x

уровня $l(x)$, деленная на $1-l(x)$:

$$ {}_0E(x) = \frac{\int\limits_0^x l(z)\,\mathrm{d}z - xl(x)}{1-l(x)}. \tag{2}$$

На рис. 1 площади прямоугольников $ABCD$ и $EFGH$ эквивалентны заштрихованным площадям S_1 и S_2.

Введем на когорте функцию слежения $\varphi(x)$ как отношение

$$\varphi(x) = \frac{{}^0E(x)}{{}_0E(x)}. \tag{3}$$

Дифференцируя уравнения (1) и (2) по x, нетрудно убедиться, что соответствующие производные положительны, и, следовательно, ${}^0E(x)$ и ${}_0E(x)$ монотонно возрастают во всем возрастном интервале, причем ${}^0E(x)-x\to 0$, а ${}_0E(x)\to e_0$ при $x\to\infty$. Здесь $e_0={}^0E(0)={}_0E(\infty)$ — обычная средняя длительность жизни родившихся живыми. Поведение $\varphi(x)$, дающей естественное сравнение множеств живых и умерших, достаточно интересно. Укажем асимптотики $\varphi(x)$ для больших и малых возрастов:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\varphi(x)-\frac{x}{e_0}\right]=0; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\varphi(x)-\frac{2e_0}{x}\right]=C_0; \tag{5}$$

$$C_0=e_0\left[2f(0)-\frac{1}{3}\frac{f'(0)}{f(0)}\right]. \tag{6}$$

Здесь $f(x)=-l'(x)$ — плотность распределения длительности жизни. Обычно $f(0)>0$, а $f'(0)<0$ ($f(x)$ — монотонно убывающая в периоде детской смертности) и, следовательно, $C_0>0$. Эти асимптотики могут быть получены различным образом: или непосредственно из анализа поведения разностей, указанных в квадратных скобках, с использованием стандартных разложений в степенные ряды, или из неравенств и асимптотических разложений для самих величин ${}^0E(x)$ и ${}_0E(x)$. Последние представляют самостоятельный интерес, и мы дадим краткую сводку таких соотношений.

Для больших возрастов (x больше модального x_{mod}) из условий вогнутости $l(x)$ и выпуклости $\ln l(x)$ вытекает

$$x+\frac{1}{2\lambda(x)}<{}^0E(x)<x+\frac{1}{\lambda(x)}. \qquad (7)$$

Для любых возрастов непосредственно из рис. 1 следует, что

$$e_0\leqslant{}^0E(x)\leqslant\frac{e_0}{l(x)}. \qquad (8)$$

Оценка по формуле (8), естественно, имеет практический смысл только для малых возрастов, где $l(x)$ близко к 1. Асимптотическое разложение ${}^0E(x)$ при малых x имеет вид

$${}^0E(x)=e_0+f(0)\,e_0x+o(x). \qquad (9)$$

Здесь $o(x)$ бесконечно малая более высокого порядка, чем x при $x\to0$. Далее, из формул (1) и (2) следует связь между ${}_0E(x)$ и ${}^0E(x)$:

$${}_0E(x)=\frac{e_0-l(x)\,{}^0E(x)}{1-l(x)}. \qquad (10)$$

Асимптотическое разложение ${}^0E(x)$ при малых x имеет вид

$${}_0E(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1f'(0)}{12f(0)}x^2+o(x^2). \qquad (11)$$

Из формул (9) и (11) непосредственно вытекает асимптотика (5, 6) для $\varphi(x)$. Итак, для малых и, по-видимому, средних возрастов x функция $\varphi(x)$ имеет гиперболический характер убывания, причем значения $\varphi(x)$ достаточно велики, что в целом коррелирует с высокой социально-экономической и социально-психологической значимостью утрат как по индивидуальным, так и по коллективным ценностным шкалам.

На рис. 2 представлены графики $\varphi(x)$, построенные по данным переписи 1959 г. в СССР. Заметим, что $\varphi_{\text{м}}(x)>\varphi_{\text{ж}}(x)$. Минимум $\varphi(x)$ достигается для мужчин около 82 лет, женщин — 86 лет. К этим возрастам в значительной мере завершается процесс вымирания когорты, и рост $\varphi(x)$ означает увеличение своего рода внутрикогортного преимущества живущих. По-видимому, характер поведения правой ветви $\varphi(x)$ вполне коррелирует с известными социально-психологическими концепциями типа ортобиоза И. И. Мечникова, насыщения жизненной информацией и т. п. Во всяком случае, следует считать, что существует целый ряд естественнонаучных количественных когортных характеристик смертности, являющихся одновременно носителями определенной социально-психологической информации и позволяющих внести хотя бы частичные рациональные уточнения в традиционно неформализуемые области индивидуального и коллективного сознания.

Субъективное отношение к смерти, индивидуальные возрастные жизнеощущения имеют, конечно, немалое значение для реального воздействия на смертность, поскольку ими определяется степень активности человека в его борьбе против смерти. Однако реальные успехи в такой борьбе в еще большей степени

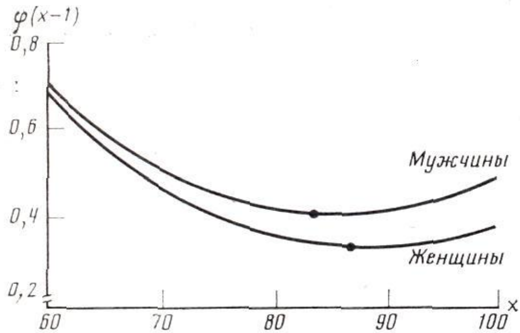

Рис. 2. Когортная сравнительная функция $\varphi(x)$

зависят от естественнонаучного понимания объективных процессов, рано или поздно подводящих каждого человека к последней черте. Именно естественнонаучные теории процессов старения и смертности, представляющие здесь для нас особый интерес, по-видимому, в наибольшей мере определяются коллективным сознанием, его уровнем и потребностями.

Проникновение в суть этих процессов предполагает определенный синтез различных отраслей знания, в частности учет общебиологических факторов старения живых организмов. Подчеркиваем, что для теоретической демографии особый интерес представляют не механизмы сложнейших физиологических регуляций и их возрастных изменений, а основные принципы теории старения, их логические структуры, макромодели, дающие возможность адекватного количественного описания и объяснения как устойчивых исторических тенденций смертности, так и ее сравнительно кратковременных трендов.

Построение таких моделей неизбежно начинается с выдвижения некоторых качественных концепций старения, которые впоследствии должны быть подвергнуты определенной инспекции с целью выбора более общей синтезирующей концепции. Мы полагаем, что реализация программы *математической инспекции (фильтра)* логических структур качественных концепций старения *возможна в рамках современной теории надежности.*

Общая идея такого фильтра в принципе проста. Имеющиеся качественные концепции старения формализуются, устанавливается методами общей теории надежности соответствующий каждой из них тип функции выживания $l(x)$, а вытекающие отсюда следствия (форма, поведение различных функционалов от $l(x)$, таких, как «сила смертности» $\lambda(x)$, средний остаток жизни, условные вероятности смерти, характеристики возрастной вариации показателей смертности и т. д.), сопоставляются с совокупностью взаимосогласованных фактов статистики смертности. В результате такой инспекции формируются общие исходные принципы — то, что выше мы условно назвали «внешней» логикой модели.

Сама идея выведения теорий старения и смертности на уровень возможности сопоставления с фактами демографической статистики представляется совершенно естественной и прослеживается от У. М. Мейкхема до А. Комфорта, Б. Стрелера и др. К сожалению, в большинстве медико-биологических работ, посвященных проблеме старения и смерти, этот естественный подход совершенно не культивируется. Все известные нам концепции старения и смертности мы разделили на следующие основные группы:

I — концепции исчерпывания «жизненного запаса»;

II — концепции накопления «дефектов», «ошибок», «повреждений»;

III — концепции термодинамических «нарушений».

Первая группа концепций имеет наиболее длительную историческую традицию, что, впрочем, не делает их наиболее убедительными.

Древнейшая попытка объяснения механизма старения и смерти есть представление о постепенном расходе некоторой субстанции с возрастом, т. е. представление типа «что-то теряется, что-то изнашивается»[2]. У Аристотеля это — «прирожденное тепло», у Гиппократа — «природный жар». Устойчивость таких представлений поистине удивительна. В XVIII в. возникают понятия «жизненный запас» (Бючли), «творческая энергия» (Пфлюгер); в XIX в. — «жизненная сила» (Ю. Либих), «регулирующая сила» (К. Бернар). В начале XX в. уже отчасти на экспериментальной основе возникает понятие «предельного видового энергообмена» (Рубнер). В середине XX в. приобретает большую популярность «адаптационная энергия» (Г. Селье)[3]. Возможно, что все эти концепции имеют общую психологическую основу в аналогии с техническими процессами износа, усталости, понимаемыми весьма нечетко в смысле исчерпания. На уровне целого организма концепциям исчерпания можно поставить в соответствие математические модели необратимо изменяющихся случайных процессов, приближающихся к некоторому критическому уровню. Независимо от трактовки этих процессов (только врожденные начальные различия или только эволюционные различия в онтогенезе), получаемые из таких математических моделей формы функции Гомперца $G(x) = \ln \lambda(x)$, резко

---

[2] *Фролькис В. В.* Природа старения. М., 1969.

[3] *Селье Г.* Очерки об адаптационном синдроме. М., 1960.

отличаются от фактически наблюдаемых в статистике смертности.

На рис. 3 дано качественное сопоставление $\lambda(x)$ для процессов износа, усталости, смертности. Кривая *1* соответствует известным в теории надежности веерным моделям износа, определяемого как $s(t)=\xi t$, где ξ — случайная величина скорости износа, чаще всего принимаемая усеченной гауссовской (модель Г. В. Дружинина). Эта модель в логическом плане наиболее соответствует концепции исчерпания. Кривые *2, 3, 4* соответствуют случайным процессам накопления усталостных повреждений

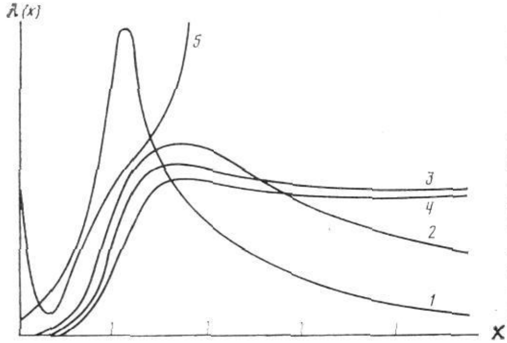

Рис. 3. Типы λ — характеристик:

1 — модели износа с «врожденными» случайными различиями постоянных скоростей износа;
2 и 3 — модели усталости при случайных процессах накопления повреждений с разной степенью затухания ($p=1$, $p=0$);
4 — модели случайного процесса накопления повреждений с вероятным ускорением ($p>0$);
5 — модели смертности населения

с разным возрастным трендом. Для степенного возрастного тренда x_p единичного повреждения было получено семейство распределений[4] $l(x, p)$ $(p\geqslant -1)$, при этом $p=-1$ дает логнормальное распределение (кривая *2*), а $p=0$ — распределение числа восстановлений (кривая *3*). При $p>0$ (возрастное ускорение процесса накопления повреждений) получаем кривые типа *4* с ненулевой асимптотой при $x\to\infty$. Общее аналитическое выражение функций выживания типа *2, 3, 4* имеет вид

$$e(y, p)=\left[1-erf\left(\frac{y^{p+1}-1}{\sqrt{2}\,\delta_0 y^{p+\frac{1}{2}}}\right)\right] \text{ при } p>-1. \tag{12}$$

Здесь $erf(x)$ — табличная функция ошибок, а

$$\delta_0=\frac{\beta}{\sqrt{2p+1}}\left(\frac{p+1}{\alpha}\right)^{\frac{p+\frac{1}{2}}{p+1}}, \tag{13}$$

где α, β,— среднее и среднее квадратическое значения случайной компоненты единичного повреждения ($\beta>\alpha$, $\alpha\ll 1$).

Параметр δ_0 можно рассматривать как критерий статисти-

---

[4] Подробнее см.: *Шукайло В. Ф.* О физическом обосновании и конструировании типов функций распределения в теории надежности//Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1971. С. 219—224.

ческого подобия, y — возраст, выраженный в долях медианного возраста:

$$y = x/x_{\text{med}}, \qquad x_{\text{med}} = \left(\frac{p+1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p+1}}. \tag{14}$$

Отметим, что при $p \geqslant 0$ асимптота $\lambda(\infty) = \frac{1}{2\delta_0^2}$. Существенно, что в рамках данной модели в принципе *невозможно* допущение возрастных трендов более сильных, чем степенные, например экспоненциальных. Кривая *5* соответствует в целом устойчивым фактам статистики смертности. Из сопоставления кривых *1, 2, 3, 4, 5* следует, что механизм демографической смертности принципиально отличается от большинства механизмов исчерпания ресурса (в частности, технических изделий). Это позволяет отклонить (в целом) концепцию исчерпания как логическую основу механизма смертности населения.

Концепций второй группы (накопление «дефектов», «ошибок», «повреждений») близки к первой и, как уже показано выше на примере моделей накопления повреждений, также не обеспечивают необходимой структуры функции Гомперца. Косвенным подтверждением этого служит также проведенный нами в свое время анализ модели накопления повреждений при наличии *функции памяти* применительно к процессу распадения браков. Эта модель позволила получить кривые «λ-характеристик» функций распределения длительности браков в основных возрастах (кроме самых младших и старших), близкие к фактически наблюдаемым. Но резкое отличие этих специфических $\lambda(x)$ от наблюдаемых в статистике смертности [5] — дополнительное свидетельство того, что процессы накопления «повреждений», так же как и процессы исчерпания, не являются ведущими в механизме смертности населения.

Третья группа термодинамических концепций довольно неоднородна. Одна линия, идущая от Э. Бауэра [6] и сейчас развиваемая в разных странах рядом авторов [7], выясняет общие особенности, характер энергетических ограничений в процессах жизнедеятельности. На этом пути, видимо, удастся установить отдельные видовые ограничения параметров функции выживания $l(x)$. Вопрос о форме функции Гомперца для всего периода онтогенеза на основе макроскопических термодинамических моделей, по-видимому, не решается. Интересна комбинированная модель Стрелера — Милдвана [8], где λ-характеристика $R_m =$

[5] См.: *Шукайло В. Ф.* К теории внутренних механизмов формообразования эмпирических функций в демографической статистике//Демографические тетради. № 2/3.Киев, 1970. С. 128, рис. 1.

[6] См.: *Бауэр Э.* Физические основы биологии. М., 1930.

[7] См.: *Зотин А. И.* Термодинамический подход к проблемам развития, роста, старения. М., 1974; *Зотин А. И., Лампрехт И.* и др. Термодинамика биологических процессов. М., 1974.

[8] См.: *Стрелер Б.* Время, клетки, старение. М., 1964.

$=R_0\exp(\alpha x)$ (принятая по Гомперцу) отождествляется с вероятностью (по Больцману) $K\exp(-\Delta H/RT)$ превышения некоторой «энергии» некоторого уровня ΔH (аналогичного энергии активации в химической кинетике). Отсюда сразу вытекают линейное убывание «жизненности» ΔH с возрастом x и обратная корреляция (реально наблюдаемая) между R_0 и α.

Недостатки этой аналогии, во-первых, в постулировании линейности функции Гомперца, во-вторых, в отождествлении микромеханизма термофлюктуационных разрывов внутримолекулярных связей в клетке с макромеханизмом «поломов» полифункциональной системы целого организма. Конечно, еще проще, следуя А. Комфорту [9], прямо отождествить степень старения с реально наблюдаемой λ-характеристикой смертности, но тогда сам вопрос о сущности демографического механизма смертности отпадает.

В целом мы считаем наиболее адекватной такую вероятностную концепцию, которая позволяет получить структуру, форму функции Гомперца как следствие определенной стохастической теории функцонирования множества организмов в норме и патологии.

С качественной стороны вполне удовлетворительны, по нашему мнению, определение Медавара («старение есть понижение жизненных сил с возрастом, повышающее вероятность смерти от случайных причин» [10]) и родственное ему более раннее определение Э. Бауэра («между двумя крайними случаями: смертью от катастрофы и физиологической смертью находится случай смерти от болезни с возрастающей (по возрасту) вероятностью» [11]).

Нами была предложена математическая модель, соответствующая в общем подобному качественному подходу [12].

Основное математическое и общебиологическое содержание этой модели следующее: течение жизни представляется как дискретный поток точечных импульсов S_ν различных типов ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$), моделирующий процесс отклонения организма от нормы (стрессы, болезни, травмы). Точечность импульсов — существенное упрощение, оправданное значительным преобладанием времени нормы над временем патологии. Импульсам S_ν соответствует специфическая структура — состояние сопротивляемости (резистентности) R_ν организма (включающая обычно *и неспецифические элементы*) [13].

---

[9] См.: *Комфорт А.* Биология старения. М., 1967.
[10] Цит. по: *Стрелер Б.* Указ. соч.
[11] *Бауэр Э.* Указ. соч.
[12] См.: *Шукайло В. Ф.* О вероятностной модели одного класса отказов элементов технико-демографических систем//Материалы VIII конф. УЗПИ. Харьков, 1967. С. 153, 154; *Он же.* К физико-статистической теории смертности населения//9-й междунар. конгр. геронтологов. Т. III. Киев, 1972. С. 275; *Он же.* К демоэкономической теории смертности.//Экономика и математические методы. 1978. № 2. С. 257—278.
[13] См.: *Селье Г.* Очерки об адаптационном синдроме. М., 1960.

Таким образом, организм рассматривается как множество ($\nu=1, 2, \ldots, m$) потенциальных функциональных систем, заложенных в физиологической конкретной структуре и включающихся при том или ином отрицательном воздействии.

Пусть $\varphi_{\nu 1}(x, x+\Delta x)$ — вероятность возникновения импульса ν-го типа в интервале $(x, x+\Delta x)$, а $\overline{w}_{\nu 1}(x, \Delta x)$ — усредненная по интервалу $(x, x+\Delta x)$ вероятность $w_{\nu 1}(\xi)$ гибели от однократного импульса ν-го типа в возрасте $\xi (x<\xi<x+\Delta x)$. По непрерывности $\overline{w}_{\nu 1}(x, \Delta x)\to w_{\nu 1}(x)$ при $\Delta x\to 0$.

Будем рассматривать импульсы как нестационарные (по возрасту), ординарные потоки без последействия. Ординарность означает практическую невозможность возникновения двух или более импульсов за отрезок времени, много меньший среднего интервала между импульсами. Рассматривая событие выживания в интервале $(0, x+\Delta x)$ как произведение события выживания в $(0, x)$ на условную вероятность выживания в $(x, x+\Delta x)$ при условии выживания в $(0, x)$, можно в силу отсутствия последействия записать эту условную вероятность без учета подробностей стрессовой предыстории в $(0, x)$:

$$l(x+\Delta x)=l(x)\,l(\Delta x\,|\,x)=$$
$$=l(x)\left[1-\sum_{\nu=1}^{m}\varphi_{\nu 1}(x, x+\Delta x)\,\overline{w}_{\nu 1}(x, \Delta x)-o(\Delta x)\right]. \qquad (15)$$

Здесь $o(\Delta x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, определяемая вероятностями гибели от серий из двух и большего числа импульсов в интервале $(x, x+\Delta x)$. Из формулы (15) находим условную вероятность гибели:

$$q(x, x+\Delta x)=1-\frac{l(x+\Delta x)}{l(x)}\sum_{\nu=1}^{m}\varphi_{\nu 1}(x, x+\Delta x)\,\overline{w}_{\nu 1}(x, \Delta x)+o(\Delta x). \qquad (16)$$

Разделив равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$, найдем выражение для λ-характеристики (силы смертности):

$$\lambda(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{q(x, x+\Delta x)}{\Delta x}=\sum_{\nu=1}^{m}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi_{\nu 1}(x, x+\Delta x)}{\Delta x}\times$$
$$\times\,\overline{w}_{\nu 1}(x, \Delta x)=\sum_{\nu=1}^{m}h_{\nu}(x)\,w_{\nu 1}(x). \qquad (17)$$

Здесь $h_{\nu}(x)$ — параметр потока импульсов, совпадающий при широких условиях с его интенсивностью. Практически $h_{\nu}(x)\Delta x$ при малых Δx дает среднее число импульсов ν-го типа в интервале $(x, x+\Delta x)$. Можно принять $w_{11}(x)=1$, приписывая индекс $\nu=1$ катастрофическим ситуациям с неизбежным смертельным исходом, но основное — в интерпретации вероятностей $w_{\nu 1}(x)$ для ситуаций с неоднозначным исходом. Мы подходим к такой интерпретации в соответствии с общими идеями параметрической теории надежности. Каждой потенциальной ν-структуре резистентности приписывается некоторая количественная мера $R_\nu(x)$ («адаптационная мощность»), убывающая, хотя и нерегулярным образом, с возрастом x. Тогда $w_{\nu 1}(x)$ интерпретируется как вероятность превышения мощностью патологической перегрузки $S_\nu(x)$ адаптационной мощности $R_\nu(x)$. Естественно, каждому индивиду следует приписывать свою пару процессов $\{S_\nu^i(x), R_\nu^i(x)\}$. Таким образом, $w_{\nu 1}(x)$ является результатом широкого усреднения индивидуальных $w_{\nu 1}^i(x)$ в определенной когорте. Это позволяет представить $w_{\nu 1}(x)$ в виде

$$w_{\nu 1}(x) = M\left\{\int\limits_{R_\nu^{(i)}(x)}^{\infty} p_\nu^i(\xi, x)\,d\xi\right\}. \tag{18}$$

Здесь $p_\nu(\xi, x)$ — плотность распределения амплитуд импульсов $S_\nu(x)$ в возрасте x. Математическая расшифровка формулы (18) может быть в техническом отношении достаточно кропотливым делом. Относительно простые приближения дает дискретная модель теории восстановления для $R_\nu(x)$ (стохастический скачкообразный процесс убывания $R_\nu^i(x)$), если предположить стабильность параметров распределения $p_\nu(\xi, x)$. Во всяком случае, различные специализации модели — это уже в основном технические вопросы.

Сказанное относится к «внешней» логике модели в соответствии с принятым выше словоупотреблением. Мы выбрали основной стохастический принцип полифункциональной модели параметрической теории надежности, «отфильтровав» ряд логически возможных (среднеколлективных) принципов старения и смертности.

Существенным и, видимо, более трудным является выбор «внутренней» логики модели, т. е. наиболее адекватных действительности специализаций «ν-структур» и определяющих их функций. Например, один и тот же (с точки зрения внешней формы $\lambda(x)$) результат можно получить, используя для S распределение Ципфа (степенное) и экспоненциальное убывание R или экспоненциальное распределение для S и линейное убывание R. В таких случаях необходимо развить достаточно полно конкурирующие модели и сопоставить по возможности наибольшее количество следствий между собой и общебиологическими и социальными фактами. На этом пути более предпочтительной оказалась модель с линейным убыванием R (точнее, математического ожидания R) и экспоненциальным распределением S. В частности, для степенного распределения амплитуд импульсов модель дает довольно малые значения «запасов прочности» к моменту завершения роста организма. Математическое оформление изложенных выше соображений позволило для возрастов $x > 25 \div 30$ (завершение стадии роста) получить следующую формулу $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) = h_1(x) + \sum_{\nu=2}^{m} a_\nu(x)(E_\nu + F_\nu x)\exp(b_\nu x). \tag{19}$$

При этом параметры a_ν, b_ν, E_ν, F_ν допускают вполне определенную биостатистическую расшифровку:

$$a_\nu(x) = h_\nu(x)\exp[-\gamma_\nu(1+B_\nu x_0)], \tag{20}$$

$$\gamma = a_\nu C_\nu, \tag{21}$$

$$B_\nu = \gamma_\nu B_\nu, \tag{22}$$

$$B_\nu = \nu_0 A_\nu C_\nu^{-1}, \tag{23}$$

$$E_\nu = 1 + \frac{1}{2} a_\nu^2 (D_\nu - \nu_0 x_0 d_\nu), \tag{24}$$

$$F_\nu = \frac{1}{2} \nu_0 d_\nu a_\nu^2. \tag{25}$$

Здесь a_ν — величина, обратная средней напряженности ν-й функциональной системы, а C_ν — ее предельная (потенциальная) напряженность (в возрасте $x_0 = 20 \div 30$ лет). Таким образом ν_0 — «ν-й запас прочности» в возрасте x_0; B_ν — средняя скорость снижения резистентности ν-й системы по отношению к C_ν. Величина B_ν, в свою очередь, расшифровывается по формуле (23) как произведение средней частоты онтогенетических перестроек ν_0 (по-видимому, ν_0 существенно меньше 1 в год) на среднее значение скачка R_ν, отнесенное к C_ν. Линейные функции $E_\nu + F_\nu x$ отражают эффект усреднения индивидуальных возрастных $R_\nu(x)$, при этом D_ν — дисперсия $R_\nu(x_0)$, а d_ν — дисперсия единичных низкочастотных скачков $R_\nu(x)$. Весьма частным случаем формулы (19) является классическая формула Гомперца — Мейкхема (h_1, a_ν, $b_\nu = \text{const}$, $F_\nu = 0$). В рамках общей модели хорошо объясняются отклонения функции Гомперца $G(x) = \ln\lambda(x)$ от линейности, а также открываются возможности прогнозирования эффективности медико-биологических воздействий (проходящих сейчас интенсивную экспериментальную проверку) на скорость старения. Оценим эту эффективность, приняв простейший вариант модели (19) в виде аппроксимации Гомперца — Мейкхема ($C = 0$, $d_\nu = 0$, $b_\nu = b$, $h(x) = f_0$).

Тогда

$$\lambda(x) = a\exp(bx) \quad \text{при} \quad x > x_0; \tag{26}$$

$$a = f\exp(-\gamma_0); \qquad \gamma_0 = \gamma(1 + Bx_0), \qquad b = \gamma B. \tag{27}$$

Полагая компоненты вариации $R_\nu(x)$ в возрасте x_0 одинаковыми и равными δ, частоту f можно представить в виде

$$f = f_0\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2\delta^2\right), \tag{28}$$

где f_0 — средняя частота реальных патологических перегрузок.

Ранее нами при $\delta=0$ величина $f_0=f$ оценивалась в 11,7 в год для мужчин и 14,4 в год для женщин по таблицам смертности населения СССР 1958—1959 гг. При $\delta=0{,}10$ (10%) уточненная оценка дает соответственно 8,7 и 10,1. Естественно, f_0 существенно больше средней частоты регистрируемых заболеваний (порядка 1—1,5 в год) и отражают высокий удельный вклад скрытых, нерегистрируемых стрессовых ситуаций. Таким образом, открываются возможности оценки скрытых (латентных) параметров существования населения на основе сопоставления развитых статистических моделей с реальными данными смертности. Для простейшей аппроксимации $\lambda(x)$ имеем для $l(x)$:

$$l(x)=\exp\left[-\int\limits_0^x \lambda(z)\,\mathrm{d}z\right]=\exp\left[-\frac{a}{b}(\mathrm{e}^{bx}-1)\right]. \qquad (29)$$

Отсюда следует выражение для медианной длительности дожития в возрасте y:

$$x_{0,5}(y)=\frac{1}{b}\ln\left[1+\frac{b}{a}(\ln 2)\exp(-by)\right]=\frac{1}{b}\ln[1+\theta(y)]; \qquad (30)$$

$$\theta(y)=\rho b\exp[-b(y-x_0)];\quad \rho=\frac{\ln 2}{f_0}\exp(\gamma). \qquad (31)$$

Для $x_{0,5}(y)$ справедливы асимптотики

$$x_{0,5}(y)\approx\frac{1}{b}\ln\rho b+x_0-y;\ \theta(y)\gg 1; \qquad (32)$$

$$x_{0,5}(y)\approx\rho\exp[-b(y-x_0)];\quad \theta(y)\ll 1. \qquad (33)$$

На рис. 4 приведены зависимости $x_{0,5}(y)$ для мужчин Латвийской ССР за 1969—1970 гг.[14] при $a=3{,}01\cdot10^{-4}$ в год и $b=7{,}32\cdot10^{-2}$ в год. Заметим, что такие значения a и b близки и для других регионов, например для Украины. Пунктирная кривая дает аналогичную зависимость при сниженной на 30% скорости старения ($B=0{,}006$ вместо $B=0{,}0085$ при прочих равных условиях f_0, γ). Непосредственно видно, что в основных трудовых возрастах до 60 лет медианное время дожития весьма близко к линейной асимптоте; таким образом, здесь увеличение $x_{0,5}(y)$ составляет примерно постоянную величину в 10 лет. В целом эти оценки являются умеренно оптимистическими. Конечно, сама возможность развития естественнонаучного подхода к проблеме прогнозирования смертности достаточно значима с самых различных точек зрения.

Рассмотренные в данной работе принципы подхода к явлениям смертности могут быть распространены на *достаточно широкий класс иных демографических явлений, допускающих мо-*

---

[14] *Звидриньш П. П., Шукайло В. Ф.* Изменение интенсивности смертности населения Латв. ССР за 1958—1970 гг.//Учен. зап. Латв. гос. ун-та им. П. Стучки. Рига, 1967. Т. 240.

делирование с позиций общей теории надежности, где отказ обычно рассматривается как результат первого выхода некоторого случайного процесса за граничную поверхность допустимого подмножества фазового пространства состояний. По-видимому, преобладающая часть разводов имеет общий универсальный порождающий механизм, родственный задачам достижения критических границ. Особой сферой является область криминологии, в которой статистический анализ правонарушений традиционно и по существу тесно связан с демографической статистикой. Здесь просматриваются полезные параллели с теорией эффективности сложных технических систем с ее акцентом на последствия отказов. Для расшифровки эмпирических функций судебной статистики (для отдельных классов правонарушений) необходим анализ как процессов выхода за допустимые границы общественного поведения, так и последствий такого «выброса». Во всяком случае, мы верим, что синтез естественнонаучных и классических демографических методов весьма полезен и позволяет неограниченно углублять наши представления о сущности явлений и соответственно повышать качество социально-экономических и социально-психологических оценок, столь необходимых в управлении современными сложными общественными процессами.

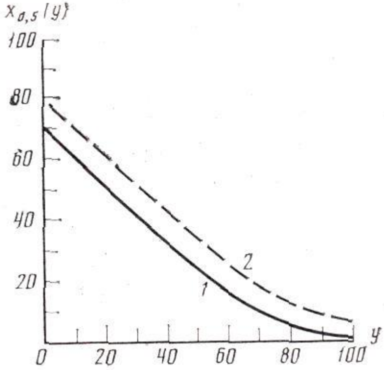

Рис. 4. Зависимость медианного времени дожития (М) от возраста y (для кривой 2 скорость старения уменьшена на 30% по сравнению с кривой 1)