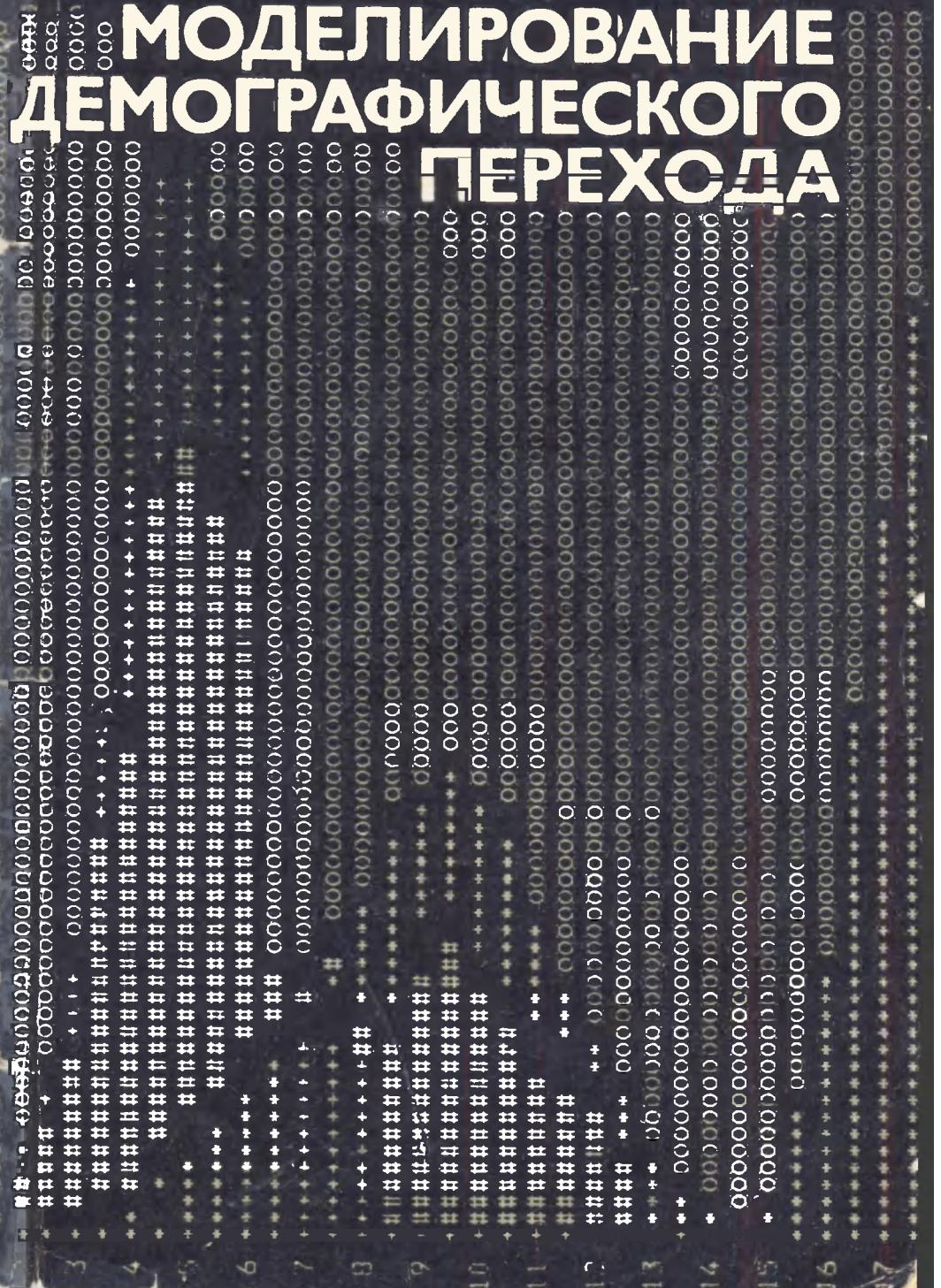


Н. Б. Баркалов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДА



Н. Б. Баркалов

МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО
ПЕРЕХОДА

Издательство
Московского
университета
1984

Баркалов Н. Б. Моделирование демографического перехода.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 80 с.

Монография посвящена проблемам моделирования на макроуровне населения, находящегося в различных стадиях демографического перехода, и прежде всего моделям изменения рождаемости. Рассматриваются практические проблемы экстраполяционных расчетов на базе дискретных моделей: подготовка статистической информации, расчет параметров, согласование модели с агрегированными управляющими переменными. Предлагается трендовая модель динамики распределения женщин по числу рожденных детей, которая согласуется с моделью движения возрастной структуры населения.

Работа рассчитана на демографов и математиков, занимающихся проблемами прогнозирования населения.

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета*

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физико-математических наук Ю. П. Иванилов,
доктор экономических наук А. Я. Кваша

Б 1502000000—067 КБ № 8—33—84
077(02)—84

© Издательство Московского университета, 1984 г.

Сегодня демография — на передовой линии социальных исследований. Нуждаются в глубоком изучении особенности современного демографического развития, но, пожалуй, еще более важно предвидеть будущее демографических процессов. Демография начинала свой путь с описания демографических тенденций, в пору становления — их анализировала, теперь ее главная цель — демографический прогноз. Именно он дает возможность глубоко изучить демографические факторы развития общества. Задача это не только научного, но и практического плана — она прямо вызвана необходимостью совершенствовать планирование и возрастанием роли управления социальными процессами во всех сферах общественной жизни, в том числе и в сфере демографической.

Но для достоверного прогноза, рассматривается ли он как инструмент планирования или как способ анализа, нужно иметь ясное представление о долговременных демографических тенденциях и вместе с тем средства исследования, адекватные сложности исследуемого объекта. Эта книга удачно соединяет то и другое. В основе представлений о тенденциях демографического развития лежит концепция демографического перехода и его социальных факторов, в качестве инструментального средства — современный аппарат демографического моделирования. Тем самым исследователи получают эффективное средство анализа демографического развития с достаточно широким диапазоном применения к разным исходным условиям. Это особенно важно для нашей страны с ее исторически обусловленным разнообразием демографических тенденций.

Жанр этой книги трудно определить однозначно. Это — не учебник и не справочник, хотя те, кто интересуется современными методами демографического анализа, найдут в ней много полезного.

Это — исследовательская работа, обобщающая немалый опыт моделирования демографических процессов, как советский, так и зарубежный, и вносящая в арсенал этих методов новые средства и новые подходы. В ней много формул, но она не формальна в том смысле, что за количественными соотношениями всегда стоит ясное понимание социального смысла демографических явлений, социально-исторической обусловленности демографических процессов.

Чтение и восприятие этой книги требуют специальной подготовки, однако упрекнуть автора в излишней усложненности могут лишь те, кто не пытался писать просто о сложном. Своеобразие авторского стиля, впрочем, играет роль несомненно положительную. Книгу эту надо не просто читать, но вчитываться в нее, а это — гарантия того, что она не будет воспринята поверхностно.

Эта книга примечательна, наконец, еще и тем, что ее автор — один из немногих пока продолжателей плодотворной линии отечественной математической демографии. Появление его работы — лучшее свидетельство тому, что это направление советской демографической мысли развивается и крепнет.

А. Г. Волков

ВВЕДЕНИЕ

Практическая важность совершенствования демографических исследований и разработки эффективной демографической политики отмечалась в решениях XXVI съезда КПСС. Исследования в области демографии были названы в числе важнейших направлений, на которых необходимо сосредоточить усилия общественных наук¹. Совершенствование системы народнохозяйственного планирования предполагает всесторонний анализ и учет демографического фактора как одного из важнейших факторов развития общества². Это выдвигает особые требования к качеству и обоснованности демографических прогнозов, в частности к математическим моделям, служащим для долгосрочного экстраполяционного прогнозирования населения.

В демографических моделях, которые в большинстве являются балансовыми, качество долгосрочной экстраполяции определяется прежде всего обоснованностью теоретических конструкций, лежащих в основе формального описания долговременных устойчивых тенденций изменения параметров воспроизводства населения. Проблемы оценивания параметров играют меньшую роль, по крайней мере если объект моделирования — регион с большой численностью населения, замкнутый в смысле миграционного движения.

Долговременная тенденция взаимосвязанного изменения параметров рождаемости и смертности, выразившаяся в исторически обусловленном качественном переходе — смене исторических типов воспроизводства населения, получила название демографического перехода или демографической революции³. Традиционный тип демографической динамики, для которого характерны высокая смертность и высокая рождаемость, заменяется современным типом, обладающим другими качественными и количественными характеристиками. Марксистский анализ демографического перехода дан в работах ряда извест-

¹ Материалы XXVI съезда КПСС. М., 1981, с. 54, 145.

² Материалы Пленума Центрального Комитета КПСС, 14—15 июня 1983 г. М., 1983, с. 13.

³ Воспроизводство населения СССР. Под ред. А. Г. Вишневского, А. Г. Волкова. М., 1983, с. 5, 18.

ных демографов. «Работы демографов-марксистов (З. Павлик, А. Г. Вишневский, А. Я. Кваша, П. Колатбари, В. Требич и др.) позволили разработать, по сути дела, принципиально новый подход к этой теории, показав экономическую обусловленность смены одного типа воспроизводства другим, социально-экономические последствия различных типов воспроизводства населения»⁴.

В работе предлагается трендовая модель тенденции рождаемости в течение демографического перехода. Она основывается на гипотезе о последовательной деформации распределения женщин по числу рожденных детей в силу диффузионного распространения нового типа рождаемости от поколения к поколению. Переменные такой модели оказываются внешними параметрами для модели нижнего уровня — обычной модели движения возрастного состава населения, описывающей более быстрые изменения. Проблемам согласования верхнего и нижнего уровней, построения буферных моделей уделяется основное внимание в работе. Выделение медленных переменных (устойчивых тенденций) не означает, что воздействие текущих социально-экономических процессов сводится только к краткосрочному и не существенному нарушению тенденций. Их взаимодействие с медленными переменными может быть многообразным, тенденция может быть изменена в большей степени, чем это представляется в модели нижнего уровня.

Поскольку существует сравнительно мало работ, посвященных реализаций стандартной модели движения возрастного состава (передвижки возрастов), то этот круг вопросов также обсуждается здесь. Акцент сделан на важных для задач регионального демографического прогнозирования вопросах выделения малого числа агрегированных управляющих переменных, которые могут быть согласованы с векторами параметров модели.

Структура книги такова. В главе 1 дается краткое описание демографического перехода и формулируется основная трендовая модель тенденции рождаемости. Глава 2 посвящена формальным свойствам модели передвижки возрастов, приводится доказательство теоремы Коула — Лопеса о слабой эргодичности. В главе 3 рассматриваются вопросы практической работы с моделью движения возрастного состава: сплайн-интерполяция возрастных распределений, расчет коэффициентов и построение конструкций, связывающих сценарные переменные и переменные моделей верхнего уровня с параметрами моделей возрастного состава. В главе 4 приведена микроимитационная модель согласования распределения населения по числу рожденных детей с распределением рождаемости по возрастам. Все модели

⁴ Валентей Д. И. К методологии изучения проблем народонаселения развивающихся стран. — В кн.: Народонаселение мира: вчера, сегодня, завтра. М., 1980, с. 33.

используют дискретные формализации и относятся к одному полу.

Автор благодарен заведующему отделом демографии НИИ ЦСУ СССР А. Г. Волкову за неизменный интерес к этой работе и полезные замечания. Большую помощь в работе и интерпретации результатов автору оказали также А. Г. Вишневский, Ю. П. Иванилов, А. Я. Кваша и Ю. Н. Черемных. Им автор приносит глубокую благодарность. Программы для ЭВМ написаны автором и реализованы на ЭВМ «Норд-100» экономического факультета МГУ.

Глава 1

ДЕМОГРАФИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД

Демографический переход — смена исторических типов воспроизведения населения — следствие общего социально-экономического развития, вызванного развитием производительных сил. Долговременные социально-экономические процессы отражаются на демографических параметрах, механизм медленного изменения которых связан с изменением установок и норм демографического поведения, действующим от поколения к поколению. В течение перехода обнаруживается разнообразие в демографическом поведении различных поколений и групп населения¹. Социально-экономическое развитие выступает как фактор направленного отбора, обеспечивая большую вероятность тем вариантам демографического поведения, которые соответствуют новому, современному типу воспроизведения населения [Вишневский, 1982, с. 39]. На этой точке зрения основывается предлагаемая трендовая модель рождаемости.

1. КОНЦЕПЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДА

Роль демографического перехода становится понятной на фоне более долговременных тенденций, составляющих собственно демографическую историю. Обычно выделяют три исторических типа воспроизведения населения. «Основные этапы демографической истории более соответствуют укрупненному трехчленному делению исторического процесса. В соответствии с этим может быть сформулировано представление о трех исторических типах воспроизведения населения. Первый из них — архетип воспроизведения населения — свойственен раннему этапу человеческой истории, доклассовому обществу. Второй — традиционный — господствует в докапиталистических классовых аграрных обществах и на ранних стадиях развития капитализма. Третий — современный, или рациональный, — возникает первоначально в экономически развитых капиталистических странах, но во всемирных масштабах это, вероятнее всего, тип воспроизведения населения, характерный для послекапиталистического этапа истории» [Вишневский, 1982, с. 49].

¹ Воспроизведение населения СССР. Под ред. А. Г. Вишневского, А. Г. Волкова. М., 1983, с. 32.

Архетип опирался на экономику палеолита (40—10 тыс. лет до н. э.), основанную на собирательстве и кочевой охоте. Продолжительность жизни в среднем не превышала 20 лет. Рождаемость была невысокой, хотя первые зачатия наступали в 13—14 лет. Есть много свидетельств детоубийства и жестких половых табу как инструмента демографического регулирования [Вишневский, 1976, с. 30, 1982, с. 53—54]. Это регулирование не предполагало индивидуальных решений родителей, дети были общими для рода [Дарский, 1979, с. 94].

Производительные силы претерпели значительные изменения около 10 тыс. лет до н. э. вслед за отступлением ледников и исчезновением популяций крупных травоядных животных [Будыко, 1977, с. 239—242]. Экономика стала производящей, утвердились земледелие и скотоводство. Неолитическая революция в экономике и последовавшие социальные изменения — разложение родового строя — привели к замене архетипа новым историческим типом воспроизводства населения — к первой демографической революции [Вишневский, 1982, с. 55]. Традиции, законы и религиозные предписания, возникшие в период после неолитической революции, носили популяционистский характер [Дарский, 1979, с. 96—97]. Иногда говорят о «демографическом взрыве» эпохи неолита. Но уже с возникновением первых городов — около 4 тыс. лет до н. э. — появляется большое число семей (не только из наиболее богатых), рождающих мало или вовсе не рождающих детей. Греческий историк, описывая эпоху после Перикла, отмечает, что «мужчины не хотели вступать в брак, или, если они вступали в брак, не хотели иметь детей, или, как правило, иметь более одного-двух»². Даже около 1000 лет до н. э. были известны разнообразные контрацептивы [Вишневский, 1976, с. 123—124]. Рабовладельческое и феодальное государство во всех известных случаях проводило популяционистскую политику, иногда очень энергичную, но часто безуспешную [Урланис, 1970].

С разложением родового строя функции демографического регулирования в значительной степени перешли к семье [Дарский, 1979, с. 95—96]. Часто высказывается точки зрения, в соответствии с которой семья традиционного типа «объективно функционировала тем лучше, чем больше детей у нее было» [Дарский, 1979, с. 101]. Дети выполняли различные роли в рамках многообразного функционирования семьи, прежде всего были необходимы для семьи как производственной единицы, особенно в условиях сельскохозяйственного производства [Борисов, 1976, с. 183]. Во многих случаях многодетность увеличивала социальный авторитет семьи, что закреплялось традициями, а иногда служила гарантией ее безопасности [Дарский, 1979, с. 102—103]. Логично предположить, что максимизация

² Полибий. Всеобщая история в сорока книгах. М., 1889, кн. 37, с. 299—300.

экономической силы семьи в целом почти всегда предполагала увеличение семьи, но, конечно, не приводила к максимизации уровня потребления каждого из ее членов. «Глава семьи стремился иметь больше детей, аналогично тому, как любой представитель господствующего класса — больше подданных, крепостных или иных зависимых работников» [Дарский, 1979, с. 101].

Приведенная точка зрения не является общепризнанной. Выгоды многодетности во многих случаях не столь очевидны, чтобы можно было их признать объективной основой стремления семьи к высокой рождаемости [Вишневский, 1979, с. 143]. Традиционная семья не предполагала выбора из различных вариантов демографического поведения, и с этой точки зрения полезность детей не могла служить мотивационной основой воспроизводства. Кроме того, в условиях высокой смертности традиционного типа воспроизводства связь демографического поведения, ориентированного на многодетность, с реальной многодетностью была далеко не однозначной [Вишневский, 1979, с. 142—143].

Снижение общего уровня смертности, изменение ее структуры и причин образуют один из двух главных процессов, из которых складывается демографический переход к современному типу воспроизводства населения. Тенденция сокращения смертности вызывается не только успехами медицины и санитарными реформами, но и, главным образом, общим повышением жизненного уровня, уменьшением угрозы голода, созданием единого рынка в масштабах страны, возможностью массовой миграции, организацией социального обеспечения. Качественные изменения смертности заключаются в значительном уменьшении роли экзогенной смертности, ликвидации основных экзогенных заболеваний. Как следствие, изменяется распределение интенсивности смертности по возрастам — от *U*-образного с высоким уровнем младенческой смертности, оно преобразуется к *J*-образному [Андреев, 1979].

Уменьшение детской смертности называется одной из причин сокращения традиционной высокой рождаемости — воспроизводство населения становится более рациональным [Борисов, 1976, с. 74]. Другие причины связываются с развитием общественного характера труда, вызывающим постепенное изменение места детей в системе ценностей семьи. «Развитие индивидуального промышленного труда вне семьи, с индивидуальной заработной платой, независимой от числа детей и вообще от наличия семьи (первоначально этот процесс происходит в городах), ведет к отмиранию производственной функции семьи. Семья перестает быть производственной ячейкой, а ее работающие члены получают экономическую независимость от семьи» [Борисов, 1976, с. 183]. Большая традиционная семья не является экономически необходимой с точки зрения повышения благосостояния каждого из ее членов.

Семья при современном типе воспроизводства населения, не связанная в большинстве случаев социальными традициями многодетности, по мнению ряда демографов, сохраняет и увеличивает оценку значения детей как «объединяющего стержня семьи, внутреннего смысла ее существования, связанного с глубинными, интимными структурами личности современного человека» [Вишневский, 1979, с. 147]. Отношение к детям — одно из главных отличий современной семьи от традиционной. А. Г. Вишневский [1979, с. 147] согласен со словами французского историка Ф. Ариеса: «В центре старой семьи находился авторитет отца и ведение хозяйства. Жизнь современной семьи строится в зависимости от ребенка и его будущего». «Современная семья непосредственно испытывает потребность в детях, которая становится только социально-психологической, моральной потребностью» [Борисов, 1976, с. 185]. Однако нет единого мнения о том, сможет ли меняющаяся социально-психологическая оценка детей взрослыми членами семьи обеспечить стабилизацию рождаемости по крайней мере на уровне простого воспроизводства. «Сейчас дети нужны для удовлетворения одной, хотя и очень важной потребности — потребности иметь объект альтруистической заботы и опеки, потребности в ощущении собственной необходимости и полезности для объекта любви и заботы. Для наиболее адекватного удовлетворения этой потребности нужен в каждый момент один ребенок» [Дарский, 1979, с. 123]. Из сказанного не вытекает, что тенденция рождаемости не может быть изменена в рамках демографической политики, ориентированной на поощрение определенных вариантов демографического поведения.

С точки зрения моделирования важным представляется не только выяснение социально-экономических причин, определивших переход к новому типу рождаемости, но и описание механизма их воздействия на демографическое поведение. Как полагают некоторые авторы, в основе тенденции рождаемости лежит процесс распространения современного типа демографического поведения от одних социальных и демографических групп к другим [Борисов, 1976, с. 185]. Фундаментальную роль играет взаимодействие демографического поведения поколений³. Внешние факторы при демографическом переходе воздействуют на население преимущественно в рамках механизма социальных отношений, т. е. как эндогенные компоненты социально-экономических взаимодействий. «Изменения в структуре прокреационной мотивации (переход от преимущественно экзогенной к преимущественно эндогенной мотивации) — это ответ демографической системы на изменившиеся исторические условия и в то же время — глубинная, качественная основа всех перемен в прокреационном поведении, происходящих на протяжении двух последних столетий, замены одного историче-

³ Воспроизводство населения СССР, с. 32.

ского типа рождаемости другим» [Вишневский, 1982, с. 169]. Демографический переход создает многообразие промежуточных форм демографического поведения, а социально-экономические условия выступают в роли факторов отбора, делая более вероятными те переходные формы, которые, в конечном счете, ведут к установлению нового типа воспроизведения населения, отвечающего «объективным требованиям функционирования демографической системы (ее самосохранения, стабильности режимов)» [Вишневский, 1982, с. 39]. Это толкование перехода, предложенное А. Г. Вишневским, на наш взгляд наиболее удачно как основа построения экстраполяционной модели рождаемости.

Таблица 1

Оценка продолжительности фаз демографического перехода

Страны и территории	T1	T2–T1	T2	T3–T2	T3
Франция	1780	20	1800		
Швеция	1790	80	1870	85	1955
США			1860	105	1965
Англия и Уэльс	1790	80	1870	95	1965
Бельгия	1800	80	1880	80	1960
Япония			1925	45	1970
Сингапур	1920	35	1955	15	1970
Гонконг			1955	15	1970

Примечание. T1 — год начала первой фазы, T2 — второй, T3 — третьей

Источники. Вишневский А. Г. Демографическая революция. М. 1976, с. 161—163; Bogue D. The population of the United States. N. Y., 1961 p. 169—171; Sundbärg A. G. Aperçus Statistique Internationaux. Stockholm 1908, p. 77—78; Historisk Statistik för Sverige. Stockholm, 1969, Del. I. p. 86—100; Annuaire Statistique de la France. 1966, p. 41; United Nations Demographic Yearbook. N. Y. 1972, p. 477, 531.

Демографический переход — глобальная тенденция демографического развития, обязательная в той или иной форме для всех стран⁴. Существуют различные варианты его периодизации. Обычно выделяют три фазы (см. табл. 1). Первая начинается с заметного сокращения общего коэффициента смертности, началу второй соответствует появление устойчивой тенденции сокращения общего коэффициента рождаемости. Характерная черта третьей фазы — незначительное повышение общего коэффициента смертности, связанное с изменением возрастного состава населения. Во многих случаях формальное наступление третьей фазы происходит уже после того, как переход к современным типам рождаемости и смертности в основном завершился.

⁴ Региональные особенности воспроизведения и миграции населения в СССР. М., 1981, с. 36; Воспроизведение населения СССР, с. 25.

Существуют различные варианты классификации типов перехода [Вишневский, 1982, с. 73—75]. При так называемом современном («быстрым») типе демографического перехода рождаемость в течение нескольких поколений может оставаться высокой, что объясняется независимостью в этом случае процессов снижения рождаемости и смертности друг от друга. Условия перехода к современному демографическому поведению не возникают параллельно процессу снижения смертности, как в «медленном» случае, когда они определяются теми же общими факторами внутреннего социально-экономического развития, что и снижение смертности. «Быстрый» тип перехода характерен для ряда развивающихся стран.

Демографический переход изменяет распределение рождаемости по возрастам. Уменьшение среднего числа детей в большинстве случаев приводит к сдвигу возрастного распределения к младшим группам. Интересное исключение — так называемый европейский тип брачности [Хаджналь, 1979, Коул, 1979], для которого характерно сравнительно позднее вступление в брак и большая доля никогда не состоявших в браке (10—15%). По-видимому, историческое развитие капитализма в европейских странах стимулировало этот тип брачности. Английская модификация демографического перехода предполагает преобладание на одном из этапов европейского типа брачности. Отсутствие сдвига возрастного распределения рождаемости к старшим группам связано с французской модификацией. После завершения демографического перехода во многих случаях наблюдается последовательное распространение ранней брачности и связанный с этим дополнительный сдвиг распределения рождаемости к младшим возрастным группам [Вишневский, 1976, с. 147—148]. Одной из причин может считаться снижение рождаемости в когортах родителей и экономическая зависимость новых семей от семей родителей.

Демографический переход в СССР, его общие закономерности и региональные особенности проанализированы в работах советских демографов, из которых прежде всего следует выделить монографию А. Я. Кваси [1974], коллективную монографию⁵ и сборник статей⁶ отдела демографии НИИ ЦСУ СССР. Важнейшая особенность, определившая специфику демографического перехода в СССР, связана с характером общественного строя нашей страны. Демографический переход «стал важнейшей чертой демографической деятельности в СССР только в период развернутого строительства социализма и — в масштабах всей страны — вступил в завершающую стадию одновременно с завершением построения зрелого социалистического общества»⁷. Переход к новому историческому типу воспроиз-

⁵ Воспроизводство населения СССР. М., 1983.

⁶ Брачность, рождаемость и смертность в России и в СССР. Под ред. А. Г. Вишневского. М., 1977.

⁷ Воспроизводство населения СССР, с. 26—27.

водства населения осуществлялся в условиях интенсивной индустриальной перестройки страны и коллективизации сельского хозяйства при значительном росте миграционной подвижности и темпов урбанизации, при устраниении религиозных установок в области брака и семьи и ликвидации культурной отсталости. В условиях социализма процесс демографического перехода «ускоряется»: вследствие коренных экономических и социальных преобразований создаются условия для ускоренного

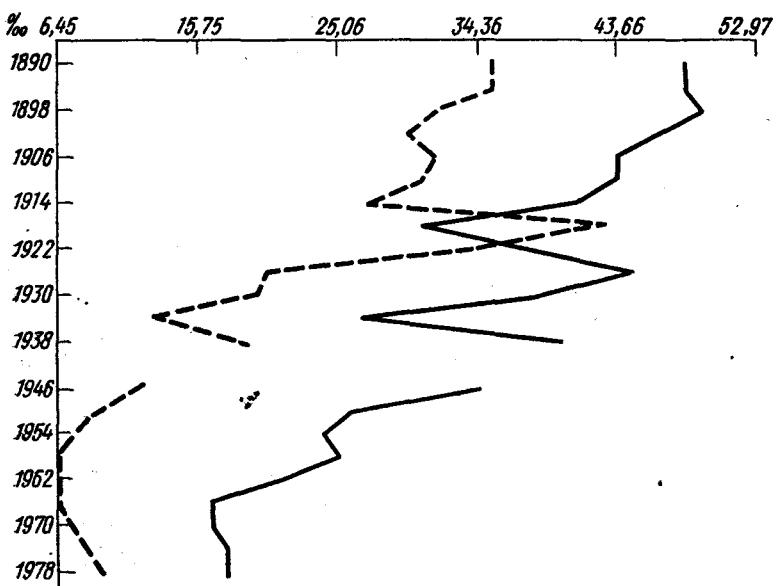


Рис. 1. Динамика общего коэффициента рождаемости и общего коэффициента смертности в СССР

снижения смертности, особенно младенческой, повышения жизненного уровня населения, роста его культуры, уничтожения неравноправия женщин, распространения городского образа жизни»⁸.

Динамика общих коэффициентов рождаемости и смертности населения СССР представлена на рис. 1. Кривые построены сплайн-интерполяцией по отдельным точкам [Гражданников, 1974, с. 68]. На раннем этапе перехода к новому типу смертности (конец XIX — начало XX века) начинается перестройка структуры причин смертности при незначительном (на 4—5 лет в течение календарного двадцатипятилетия) увеличении средней продолжительности жизни. Эзогенная смертность преобладала еще в 20-е годы, возрастное распределение смертности

⁸ Бодрова В. В. Народонаселение европейских социалистических стран. М., 1976, с. 6.

сохраняло *U*-образную форму. Становление нового типа смертности осуществлялось в основном в советский период, вплоть до конца 50-х годов. Резкое увеличение продолжительности жизни приходится на конец 40-х—50-е годы. В этот же период младенческая смертность сокращалась наиболее интенсивно и возрастное распределение смертности приняло *Ж*-образную форму⁹.

Многодетность традиционной русской крестьянской семьи, по-видимому, перестала соответствовать экономическим условиям после реформы 1861 г. Но переход к новому типу демографического поведения тормозился социальными и религиозными традициями, невежеством крестьянства, реакционностью политического режима [Миронов, 1977, с 102—103]. Тенденция к снижению общего коэффициента рождаемости проявилась в начале XX века. Однако накануне революции Россия по уровню рождаемости (45%) занимала одно из самых высоких мест в мире. Переход к новому типу рождаемости заметно ускорился уже в 20-е годы. Значительное сокращение рождаемости произошло в 30-е годы, причем именно в этот период отмечается существенная дифференциация рождаемости по отдельным поколениям и социально-демографическим группам, что является характерным признаком быстроты перехода. Европейский тип брачности не был распространен среди населения СССР. Некоторый сдвиг возрастного распределения брачности к старшим группам отмечался после 1926 г., после 1959 г. появились признаки противоположной тенденции [Вишневский, 1976, с. 176]. Можно считать, что новый тип демографического поведения, предполагающий внутрисемейное регулирование рождаемости, был принят большей частью населения СССР к концу 50-х годов¹⁰.

Демографический переход, изменяя уровни и возрастные распределения параметров рождаемости и смертности, оказывает определяющее воздействие на динамику демографических переменных, связанных с возрастным составом. Это влияние в основном исследовано [Пирожков, 1976]. Практически не исследован более интересный вопрос: в какой мере движение возрастной структуры и возможные экзогенные воздействия влияют на фундаментальные медленные параметры демографического поведения. Ответ на этот вопрос позволил бы описать возможное регулирование общей тенденции демографического перехода.

⁹ Воспроизводство населения СССР, с. 60—61, 92, 96.

¹⁰ Воспроизводство населения СССР, с. 158, 177.

2. ТРЕНДОВАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Построение эконометрической модели, связывающей долговременную тенденцию рождаемости с объясняющими переменными, — задача с небольшими шансами на успех. Трудно обосновать выбор объясняющих переменных (см. замечания Э. Дж. Коула [1979, с. 94—96]). Трудно обеспечить сопоставимость статистических измерений таких переменных на длительных временных интервалах. Это тем более относится к переменным, характеризующим социальную структуру, хотя именно их логичнее считать объясняющими.

Иногда предпринимается эконометрическое оценивание моделей рождаемости на базе временных рядов, явно меньших по длительности, чем фазы демографического перехода. Вряд ли оценки окажутся удачными для экстраполяционного прогноза или определения роли факторов в динамике. Функциональная связь быстрых экономических переменных непосредственно с характеристиками воспроизводства населения наверное лишь создаст иллюзию управления моделью.

В работе автора [1979] предложена простейшая трендовая модель динамики агрегированных показателей рождаемости в течение демографического перехода. Она сводится к предпосылке об устойчивом распространении нового типа рождаемости в рамках диффузионного процесса. В. К. Горбуновым [1982] построена общая экономико-демографическая модель, связывающая параметры диффузионного процесса с характеристиками социально-экономического развития.

Основной тезис о динамике рождаемости как о направленном диффузионном процессе сохраняется здесь. Он представляется как медленный процесс изменения установок и норм демографического поведения, действующий от поколения к поколению. Переход к новому типу рождаемости осуществляется в связи с восприятием каждым поколением системы ценностей и норм поведения предшествующих поколений, причем установки демографического поведения, не соответствующие новому типу воспроизводства, большей частью отвергаются новым поколением. С этой точки зрения, социально-экономические процессы, определяющие переход к новому типу рождаемости, выступают как факторы направленного отбора из множества промежуточных форм демографического поведения, уменьшения разнообразия этих форм и «повышения вероятности тех из них, которые в наибольшей мере соответствуют объективным требованиям демографической системы» [Вишневский, 1982, с. 147].

Формально тенденция рождаемости описывается трендовым механизмом — преобразованием распределения по вариантам демографического поведения каждого поколения в связи с распределениями других поколений. Это преобразование может интерпретироваться как подражание избранным вариантам демографического поведения других поколений. Трендовый ме-

низм описывает инерционные изменения характеристик рождаемости реального поколения (когорты). Наблюдаемые демографические параметры, относящиеся к календарному году (условному поколению), представляют собой наложение различных вариантов демографического поведения когорт, а также испытывают воздействия более быстрых демографических и экзогенных переменных, значения которых могут изменяться от года к году. Отклонения наблюдаемых переменных от потенциальных, определенных трендом, становятся одним из факторов, поддерживающих трендовый процесс. Положение формально аналогично интересному эффекту, отмеченному Р. Д. Ли [1980, с. 85]: малые, не направленные изменения параметров воспроизводства населения вызывают резонанс, поддерживающий основную динамику возрастного состава.

Здесь хотелось бы предложить наиболее слабую гипотезу о трендовом механизме из числа достаточных для объяснения тенденции рождаемости на временном интервале демографического перехода.

Трендовые изменения логично формулировать в терминах распределений женщин по суммарному числу детей. Пусть $z(t)$ — плотность такого распределения, отнесенная к реальному поколению, рожденному в год t . Таким образом, $z_k(t) = z(k, t)$ означает долю женщин, родивших в течение жизни $k-1$ детей. Аналогично $\zeta(t)$ — плотность распределения по желаемому числу детей. Введение этого распределения не означает, вообще говоря, сознательного планирования демографического поведения: отсутствие такого планирования formalизуется сосредоточением ζ (но не z) на максимальной координате. В расчетах оба распределения представлялись 16-мерными векторами. Распределения $\zeta(t)$ и $z(t)$ для упрощения будут называться ниже желаемым и фактическим распределениями.

В этих же терминах описывается распределение родителей когорты (т. е. условного поколения) по фактическому $zg(t)$ и желаемому $\zeta g(t)$ числу рожденных детей. Распределения относятся к календарному году и представляют условное поколение, предшествующее реальному поколению, рожденному в этот же год. Пусть $P(t, a)$ — численность населения в одногодичной возрастной группе $[a, a+1]$, измеренная на начало календарного года, а $F(t, a)$ — элементы первой строчки матрицы Лесли, т. е. приведенные к началу календарного года коэффициенты рождаемости. Тогда веса $v = P \cdot F$ составляют конструкцию распределенного запаздывания:

$$zg(t, k) = G(k-1) \sum_{(a)} z_k(t-a-1) v(t, a), \quad (1)$$

связывающую распределения родителей и детей. Константа G введена для нормирования. Если из равенства (1) исключить

целочисленное взвешивание, оно опишет распределение рождающего контингента календарного года по суммарному числу рождений.

Различие фактического и желаемого распределений зависит от уровня и возрастного распределения смертности, характеристик здоровья населения, возрастного распределения брачности и практики контрацепции. Простая гипотеза сводится к введению стохастической матрицы $Q(t)$, такой, что $z(t) = \zeta(t)Q(t)$. Отклоняющие от тренда переменные, связанные с календарным годом (условным поколением), отражаются, таким образом, только весами распределенного запаздывания в равенстве (1). В матричных обозначениях

$$zg(t) = G \sum_{(a)} \zeta(t-a-1) Q(t-a-1) Kv(t, a),$$

где K — диагональная матрица, $K = \text{diag}(0, 1, 2, \dots)$. Для желаемого распределения выражение более сложное. С точностью до нормирования оно равно

$$\zeta g(t) = \sum_{(a)} \text{diag}[\zeta(t-a-1)] Q(t-a-1) K I v(t, a). \quad (2)$$

Здесь I — вектор, все координаты которого — единицы. Вес каждой компоненты соответствует фактическому числу рождений при данном желаемом.

Общая гипотеза о трендовом механизме демографического поведения сводится к постулированию подражания каждого поколения как опережающему его на год поколению, так и предшествующему ему поколению родителей. В первом случае принимается во внимание только желаемое распределение, во втором — желаемое распределение и фактическое распределение, отразившее опыт поколения родителей. Этот объект подражания упрощенно может быть описан выпуклой комбинацией

$$\theta(t) = CF zg(t) + (1-CF) \zeta g(t), \quad (3)$$

где CF — параметр модели, лежащий в единичном интервале. Несовпадение фактического и желаемого числа детей, а также переменные, связанные с распределенным запаздыванием, randomизируют традиционное распределение ζ , сосредоточенное на максимальной координате, что поддерживает трендовый процесс.

Направление процесса устанавливается общими факторами, обеспечивающими притягательность в социальном и экономическом отношениях нового типа рождаемости. Не может быть желаемым число детей большее, чем в поколениях, служащих объектом подражания, хотя совпадение вполне допустимо. Поэтому можно предположить, что плотность $\zeta(t)$ — это плотность минимума случайных величин, имеющих плотности

$\zeta(t-1)$ и $\theta(t)$. Гипотеза формализуется равенством

$$\begin{aligned}\zeta(k, t) = \zeta(k, t-1) \theta(k, t) + \zeta(k, t-1) \sum_{j>k} \theta(j, t) + \\ + \theta(k, t) \sum_{j>k} \zeta(j, t-1).\end{aligned}\quad (4)$$

Уравнение (4) не означает, что изменение демографического поведения когорты происходит в течение одного года. Каждая следующая когорта в течение всей жизни модифицирует поведение опережающей ее когорты, а уравнение (4) лишь предвидит конечный результат.

Трендовая гипотеза (4) производит впечатление слабой. По существу, она сводится к предпосылке о направленном уменьшении различий в демографическом поведении поколений. Эксперименты с некоторыми реализациями этой гипотезы показывают, что она обеспечивает реальную длительность фазы снижения рождаемости, логичную асимптотику и объяснимые зависимости между временными характеристиками и деформацией распределений по числу детей. Во всяком случае она может пониматься как гипотеза о наиболее медленном варианте тенденции рождаемости, причем фактические ее ускорения могут быть объяснены в рамках трендового механизма как следствия дополнительной (экзогенной) демографической неоднородности.

Гипотеза о трендовом механизме открывает широкий диапазон конкретных формализаций в связи с различными базовыми моделями демографической динамики. Для упрощения трендовый процесс сначала реализован в чистом виде, исключающем воздействия внешних переменных: распределенные запаздывания (1) и (2) заменены фиксированным средним лагом. Аналитические свойства и числовые характеристики модели остаются такими же, если запаздывание распределенное, но веса $v(a)$ не зависят от времени. Затем реализована простая модель движения поколений, имеющая целью проследить воздействие внешних переменных на скорость трендового процесса. Асимптотическая плотность не зависит от изменения с течением времени весов распределенного запаздывания, но зависит от динамики матрицы преобразований желаемого распределения в фактическое.

Для реализации общей модели с распределенным запаздыванием, связанной с моделью Лесли, необходимо решить целый ряд технических проблем. Описание путей их решения в связи с общими вопросами построения экстраполяционной демографической модели (построение буферных зависимостей) является целью последующих глав.

Средний лаг LAF , заменяющий распределенное запаздывание, лежит, очевидно, в диапазоне длины поколения — 22—29 лет (см. гл. 2.2). Уравнения (1)—(4) полностью определяют

динамику модели, если известна динамика матрицы преобразований. Для простоты она предполагается линейной:

$$Q(t) = \left(1 - \frac{t-LAF}{LC}\right)C + \frac{t-LAF}{LC} I$$

при $LAF < t < LC + LAF$. Здесь I — единичная матрица, C — матрица преобразований традиционной рождаемости, а LC — параметр экзогенной скорости демографического перехода. Он может считаться внешним управляющим параметром, но воз-

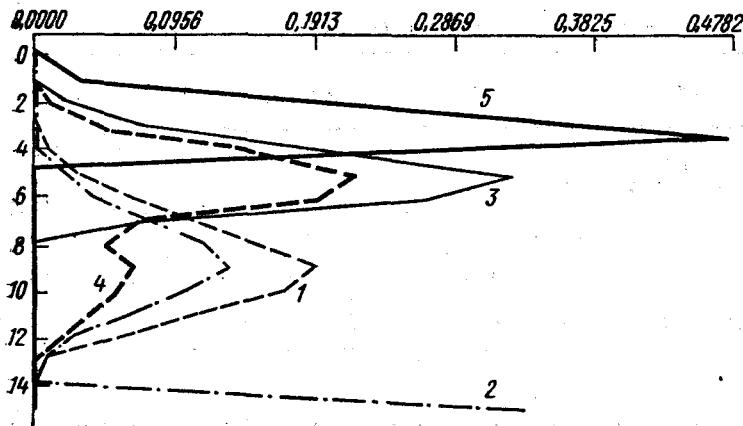


Рис. 2. Плотности распределений женщин по числу рожденных детей, полученные по трендовому процессу: 1 — фактическое распределение, год 0; 2 — желаемое распределение, год 10; 3 — желаемое распределение, год 50; 4 — фактическое распределение, год 50; 5 — фактическое распределение, год 80

действует на трендовую модель лишь косвенно. Матрица C получена с помощью реализованной в гл. 4 микроимитационной модели рождаемости при предпосылках о традиционной ранней брачности и полном отсутствии контрацепции (распределение «А»). В этом случае распределение по числу рожденных детей не зависит от желаемого. Поэтому в матрице C все строки одинаковые — c , и уравнение динамики становится простым:

$$z(t) = \left(1 - \frac{t-LAF}{LC}\right) c + \frac{t-LAF}{LC} \zeta(t). \quad (5)$$

Преобразование (5) не отражает смертности как фактора отличия желаемого от фактического числа рожденных детей. Смертность учитывается весами запаздывания в равенствах (1) — (2) и предполагается независимой от распределения по числу детей.

Результаты численной реализации трендового процесса при различных значениях параметров приведены в табл. 2—3. Ри-

сунки 2—3 иллюстрируют процесс с параметрами $LC=75$, $LAF=25$, $CF=0.1$. В нашей стране коэффициент суммарной рождаемости условного поколения 1896/97 г. соответствовал традиционной высокой рождаемости. Когорты, вступившие в брак около 1960 г., были, по-видимому, первыми, определившими желаемое число детей около двух. Таким образом, вся

Таблица 2

Зависимость скорости сокращения рождаемости от параметров трендовой модели: число лет, за которые средняя рождаемость достигает данного уровня

«Быстрый» демографический переход: $LC=25$ лет *

<i>CF</i>	0.1	0.4	0.7	1.0
Средний уровень желаемой рождаемости				
4.0	60—65	47—50	44—47	45—48
3.0	73—78	62—67	61—65	63—66
2.0	91—98	82—87	82—88	89—94
1.0	140—150	134—144	139—149	154—166

«Медленный» демографический переход: $LC = 100$ лет

<i>CF</i>	0.1	0.4	0.7	1.0
Средний уровень желаемой рождаемости				
4.0	61—66	49—52	47—50	56—59
3.0	75—81	65—70	67—71	82—86
2.0	95—103	86—93	92—98	113—119
1.0	148—160	142—153	151—160	178—189
Средний уровень фактической рождаемости				
4.0	80—83	76—78	78—79	84—85
3.0	90—93	87—89	88—90	95—96
2.0	99—103	97—99	99—100	113—119
1.0	148—160	142—153	151—160	178—189

* В этом случае скорость фактической рождаемости почти совпадает со скоростью желаемой.

П р и м е ч а н и е. Левое число соответствует лагу воспроизводства (LAF , 24 года, правое — 27 лет).

фаза сокращения рождаемости от традиционной до желаемого уровня, близкого к двум рожденим, заняла около 75 лет. Переход от желаемого уровня четырех детей к трем — занял около 15 лет, от трех к двум — около 20 лет [Белова и др., 1977, с. 36—37]. Трендовый процесс (табл. 2) демонстрирует

несколько меньшую скорость в начальный период снижения рождаемости и примерно такую же в дальнейшем. Эта скорость мало зависит от экзогенного параметра скорости или от среднего лага (длины поколения), но существенно зависит от параметра рандомизации. Если бы $CF=0$, то в однородном населении с традиционной рождаемостью трендовый процесс

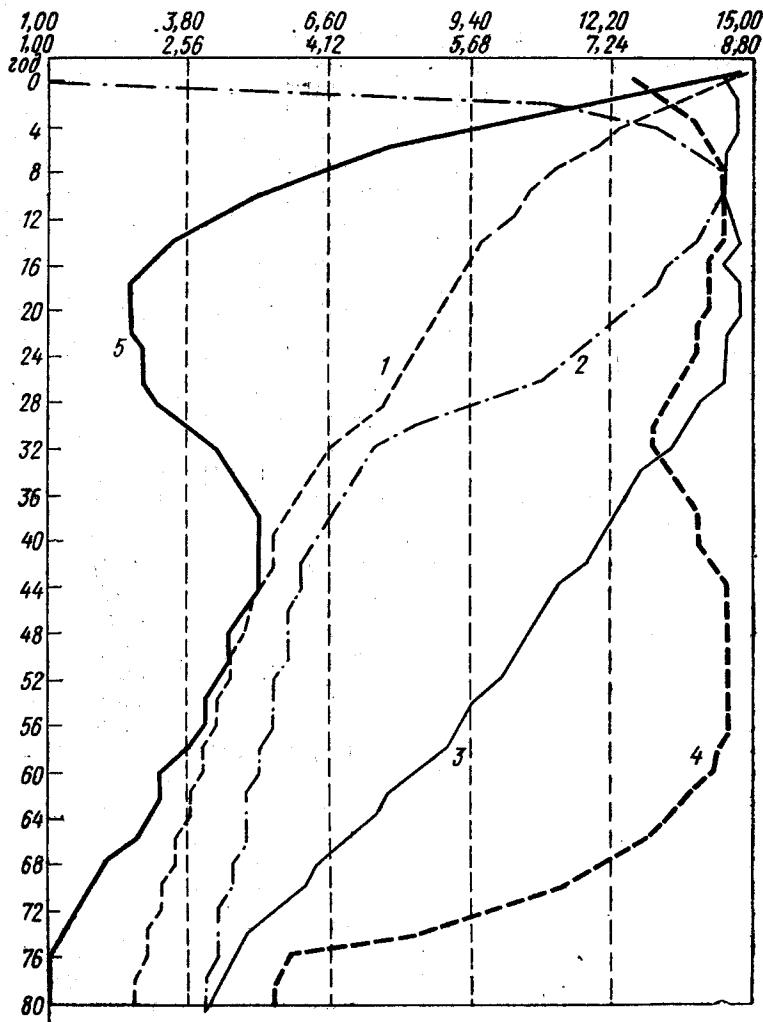


Рис. 3. Динамика трендового процесса рождаемости: 1 — среднее желаемой рождаемости; 2 — стандартное отклонение желаемой рождаемости; 3 — среднее фактической рождаемости; 4 — стандартное отклонение фактической рождаемости; 5 — положительная разность между плотностями распределений.

Верхняя шкала соответствует желаемому распределению, нижняя — фактическому

вообще не имел бы места. При низкой рождаемости, когда фактическое число рождений может превышать желаемое, параметр рандомизации окажется тормозом. Постоянство этого параметра является одной из причин малой скорости моделируемого перехода.

Таблица 3
Некоторые распределения по желаемому числу детей

Число детей	A1	B1	A2	B2	A3	B3
0	0.025	0.000	0.020	0.000	0.014	0.000
1	0.217	0.178	0.140	0.077	0.027	0.007
2	0.605	0.707	0.518	0.485	0.112	0.054
3	0.125	0.121	0.212	0.410	0.134	0.159
4	0.019	0.001	0.069	0.028	0.194	0.348
5	0.006	0.000	0.029	0.000	0.160	0.341
6+	0.003	0.000	0.012	0.000	0.359	0.091
среднее число	1.93	1.943	2.31	2.389	5.00	5.210
стандартное отклонение	0.774	0.544	1.022	0.669		2.301

Приимечание:

A — распределения, полученные обследованием НИИ ЦСУ 1972 г;

A1 — городское население 2-й этнодемографической группы;

A2 — белорусы (все население);

A3 — таджики (городское население);

B — распределения, моделируемые трендовым процессом, в различные годы;

B1 — 100-й год от начала процесса;

B2 — 90-й год от начала процесса;

B3 — 60-й год от начала процесса.

Источник: Белова В. А. и др. Сколько детей будет в советской семье М., 1977, с. 26—27.

В табл. 3 моделируемые по тренду распределения $\zeta(t)$ с параметрами $LC=75$, $LAF=25$, $CF=0.1$ сравниваются с имеющими такое же среднее фактическими распределениями по ожидаемому числу детей, полученными обследованием НИИ ЦСУ 1972 г. Моделируемое распределение — всегда унимодальное, за исключением первых 2—3 десятилетий процесса, хотя распределение $\zeta(t)$ значительно дольше сохраняет два максимума плотности и высокую дисперсию (см. рис. 2 и 3). Фактические распределения по ожидаемому числу детей обладают большей дисперсией, чем моделируемые, и наверное дольше не приходят к унимодальности. Причина, по-видимому, в том, что трендовый процесс описывает демографически однородное население, начальные условия которого сконцентрированы на неограниченно высокой рождаемости. Фактический демографический переход не только в начальные годы, но и в течение всей фазы сокращения рождаемости испытывает дополнительную рандомизацию. Региональная и социально-демографиче-

ская неоднородности так же, как и любые другие быстрые процессы, возмущающие распределение когорт по числу рождений, сообщают дополнительное ускорение трендовому процессу.

Интересна асимптотика трендового процесса. В завершающей фазе демографического перехода при современном типе рождаемости можно допустить совпадение желаемого и фактического распределений. Тогда уравнения (1)–(3) сводятся к

$$\theta_k(t) = zg_k(t) = \frac{(k-1) \sum_{a=0}^{\beta} z_k(t-a-1)v(t, a)}{\sum_{a=0}^{\beta} \bar{z}(t-a-1)v(t, a)}. \quad (6)$$

Здесь $\bar{z}(t)$ — средняя случайной величины, имеющей плотность $z(t)$. Суммирование по возрастным группам достаточно проводить до максимального фертильного возраста β . Обычно $\beta=49$ лет.

Распределение лагов в уравнении (6) зависит от трендового процесса, но сумма весов равномерно ограничена. Действительно, первая координата $\theta_1(t)$ тождественно равна нулю и $\sum_{j>1} \theta_j(t) = 1$, поэтому первая координата $z_1(t)$ не меняется

уравнением (4) с течением времени. Таким образом, среднее $z(t) \geq \sum_{j>1} z_j(t) = 1 - z_1$, т. е. процесс не может привести к сокращению рождаемости, большему, чем до числа детей, близкого к единице. Отсюда сумма весов:

$$\frac{1}{n-1} \leq \sum_{(a)} v(t, a) / \sum_{(a)} \bar{z}(t-a-1)v(t, a) \leq \frac{1}{1-z_1}. \quad (7)$$

Если для некоторой координаты k справедливо $z_k(\tau)=0$ или $z_k(\tau)=1$ при всех $\tau \in [t-1, t-\beta-1]$, то соответствующее равенство сохраняется для $\theta_k(t)$ и в силу уравнения (4) для $z_k(t)$. Поэтому если на начальном отрезке $[0, -\beta-1]$ плотность сконцентрирована в одной точке, то распределение останется инвариантным относительно преобразований (4), (6). Существуют и другие инвариантные распределения. Поскольку первая координата постоянна, инвариантно любое распределение, сосредоточенное в двух точках: $z_1=1-z_1$ на начальном отрезке. Для последней координаты справедливо уравнение

$$z_n(t) = \frac{(n-1)z_n(t-1) \sum z_n(t-a-1)v(t, a)}{\sum \bar{z}(t-a-1)v(t, a)} = \theta_n z_n. \quad (8)$$

Для инвариантности, следовательно, необходимо выполнение условия $\bar{z}=(n-1)z_n$. Отсюда следует, что сосредоточение рас-

пределения в двух точках $z_n = 1 - z_1$ является и необходимым условием инвариантности.

Пусть l означает минимальный из номеров $2, \dots, n$, такой, что координата $z_l(t)$ не совпадает тождественно с нулем на начальном отрезке. Тогда двухточечное распределение, задаваемое равенством $z_l = 1 - z_1$, оказывается асимптотическим для любого начального распределения. Ниже приведено доказательство.

Для доказательства предполагается, что существует по крайней мере одна компонента $a > 0$ распределенного запаздывания, такая, что $v(t, a) > 0$ при всех $t > 0$. Это условие может считаться естественным. Координаты с номерами $2, \dots, l-1$ (если такие существуют) тождественно равны нулю, поэтому сумма $\sum \theta_i = 1$ и, значит, справедливо уравнение движения:

$i \geq l$

$$z_l(t) = z_l(t-1) + \theta_l(t) \sum_{j>l} z_j(t-1).$$

Координата $z_l(t)$ не убывает при всех $t > 0$, причем становится положительной по крайней мере начиная с года β . Действительно, пока $z_l(t) = 0$, сумма $\sum_{j>l} z_j(t) > 0$, в противном случае

$z_1 = 1$ и проблема сводится к случаю распределения, сконцентрированного в одной точке. Таким образом, для всех координат с номерами $k > l$ начиная с года $T = \beta + 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{i>k} \theta_i(t) \leq 1 - \theta_l(t) \leq 1 - \frac{l-1}{n-1} z_l(0) = \lambda. \quad (9)$$

Правая часть последнего неравенства обозначена $\lambda \equiv (0, 1)$.

Сходимость устанавливается индукцией от n к $l+1$. Уравнение (8) вместе с ограничением (9) приводит к сходимости последней координаты: $z_n(T+t) \leq z_n(T) \lambda^t \rightarrow 0$. Поскольку веса распределенного запаздывания равномерно ограничены неравенствами (7), для любой координаты $k > l$ при $t > T$ справедливо неравенство

$$z_k(t) \leq \lambda z_k(t-1) + \frac{k-1}{1-z_1} \varepsilon \sum_{a=0}^{\beta} z_k(t-a-1),$$

где ε с течением времени может быть сделан сколь угодно малым вследствие предположения индукции. Таким образом, динамика координат мажорируется решением разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$1 = \lambda x^{-1} + \frac{k-1}{1-z_1} \varepsilon \sum_{a=0}^{\beta} x^{-a-1}. \quad (10)$$

Это вариант характеристического уравнения Лотки (см. гл. 2.1). Кривые $x - \lambda$ и $\frac{k-1}{1-z_1} \varepsilon \sum x^{-a}$ пересекаются в действительной положительной области только один раз, поскольку сумма, стоящая в правой части характеристического уравнения, — строго убывающая и выпуклая функция x . При малом ε единственный действительный положительный корень ρ лежит в интервале $(0, 1)$, так как $0 < \lambda < 1$. Что касается других корней, то их действительные части $\operatorname{Re} x = r \cos \varphi$ удовлетворяют равенству

$$1 = \lambda r^{-1} \cos \varphi + \frac{k-1}{1-z_1} \varepsilon \sum_0^{\beta} r^{-a-1} \cos(a+1)\varphi.$$

Поскольку $\cos \varphi < 1$, то $r^{-1} > \rho^{-1}$ и, значит, $r < \rho < 1$. Таким образом, все корни характеристического уравнения (10) по модулю меньше единицы, и разностное уравнение, мажорирующее координату $z_k(t)$, асимптотически устойчиво. Этим доказывается сходимость.

Практически сходимость трендового процесса возможна только к распределению, определенному равенством $z_2 = 1 - z_1$, т. е. к распределению, обеспечивающему среднее число рождений, близкое к единице, поскольку нельзя ожидать, что координаты, соответствующие низкой рождаемости, окажутся нулевыми при совпадении фактического и желаемого распределений. Фаза низкой рождаемости (при суммарном коэффициенте, равном 1—2) длительна в любой реализации процесса. Движение лаговой структуры, являющееся следствием изменения распределения рождаемости по возрастам и движения возрастного состава населения (в частности, миграционных воздействий), оказывает малое влияние на скорость процесса и не влияет на асимптотическое распределение.

Это положение иллюстрируется простой моделью движения поколений [Баркалов и Катус, 1982]. Пусть $B(t)$ — число родившихся в течение 15-летия, начинаящегося годом t . Тогда передвижка возрастов упрощенно описывается простым вариантом разностного уравнения Лотки:

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{2} B(t-1) L_1 \varphi(t-1) \bar{z}(t-1) + \\ &+ \frac{1}{2} B(t-2) L_2 (1 - \varphi(t-2)) \bar{z}(t-2) = B_1(t) + B_2(t). \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь φ — доля возрастной плотности рождаемости, сосредоточенная в группе 15—29 лет, относящаяся к реальному поколению, L_i — числа живущих для 15-летних групп. Множитель $1/2$ учитывает наличие двух полов. Распределение по суммарной

рождаемости родителей с точностью до нормирования определяется равенством

$$\theta(t) = K(B_1(t)z(t-1) + B_2(t)z(t-2))/B(t). \quad (12)$$

Здесь K — как и раньше, взвешивающая диагональная матрица.

В классической модели передвижки возрастов доля $\phi(t)$ постоянна или меняется в связи с суммарной рождаемостью реального поколения. Гипотеза Р. Истерлина в интересной формализации П. А. Самуэльсона [1976] постулирует существование отрицательной обратной связи между коэффициентами рождаемости младших возрастных групп и их численностью в отношении к старшим группам условного поколения. Существование такой зависимости весьма спорно, но ее включение в модель интересно, поскольку дает возможность проследить воздействие изменения возрастной структуры рождаемости на ее общую тенденцию.

В рассматриваемой формализации отрицательная обратная связь выражается зависимостью

$$\phi(t) = \phi \left[\frac{B(t)L_1}{B(t-1)L_2} \right] = \phi[q]. \quad (13)$$

Невозможность откладывания рождений (переноса в старшие возрастные группы) выразится фиксированием в уравнении (11) веса $\phi(t-2)$. В этом случае суммарная рождаемость когорты может отличаться от трендовой.

В нашей работе [Баркалов и Катус, 1982, с. 89] была сделана попытка оценить зависимость (13) по пространственному срезу переписи населения СССР 1970 г., включающему данные о территориях, демографический переход в которых можно считать завершенным. В линейном и логарифмически линейном случаях оценки таковы:

$$\phi = 0.9811 - 0.3037q$$

$$(0.0080) \quad (0.0692) \quad F = 19.26, \quad DW = 1.69;$$

$$\ln \phi = -0.3824 - 0.3418 \ln q$$

$$(0.0003) \quad (0.0807) \quad F = 17.93, \quad DW = 1.80.$$

Несмотря на расплывчатость оценок, угловые коэффициенты существенно отличны от нуля (в скобках приведены стандартные ошибки параметров).

Модель (11)–(13) реализована при начальном распределении $z(0)$, совпадающем с распределением по ожидаемому числу детей русского городского населения, полученным обследованием НИИ ЦСУ 1972 г. [Белова и др., 1977, с. 27]. Отличие фактического распределения от желаемого игнорируется. Динамика суммарной рождаемости условного поколения пред-

ставлена в табл. 4. Несмотря на то что зависимость (13) ощущимо меняет движение возрастной структуры, в некоторых случаях, сохраняя незатухающие колебания [Самуэльсон, 1976], она мало сказывается на трендовом процессе. Это также относится к собственно динамике возрастного состава как в простой модели (11) — (12), так и в общей модели передвижки возрастов с одногодичными возрастными группами. В последнем случае, однако, замедление трендового процесса сильнее (переход от двух рождений к одному занимает около 120 лет). Отразить гипотезу Р. Истерлина в общей модели не удается, потому что трудно предложить обоснованную формализацию зависимости типа (13), если число рождающихся возрастных групп велико [Конгтон, 1980].

Сказанное не означает, что стабилизация рождаемости на среднем уровне $1 - z_1$ оказывается единственно возможной. Если желаемые распределения по числу рождений мало отличаются от поколения к поколению, существенную роль играет движение матрицы преобразований $Q(t)$. Во-первых, в современном населении сохраняется различие между желаемым и фактическим числом детей, причем смещение может быть в сторону многодетности (в частности, из-за смещения брачности к младшим группам). Во-вторых, во всяком случае в завершающей фазе демографического перехода (а при современном типе, по-видимому, и в течение всего перехода), движение матрицы преобразований испытывает существенное воздействие быстрых переменных, значения которых могут изменяться с каждым календарным годом. Это — воздействия демографической политики, изменения, связанные с миграционным движением, нарушения возрастной плотности рождаемости. В определенной мере их удается учесть статически с помощью микроимитационной модели рождаемости (гл. 4). Взаимодействия внешних переменных с трендовыми многообразны, и тенденция может быть изменена явно в большей степени, чем это представляется в модели, игнорирующей накапливание внешних воздействий.

Поэтому неопределенно долгое поддерживание рождаемости на уровне 1—2 детей в среднем не является нелогичным с точ-

Таблица 4
Движение суммарной рождаемости
условного поколения
по модели (11) — (13)

Годы	1	2	3
0	1.851	1.851	1.851
15	1.657	1.670	1.680
30	1.471	1.483	1.491
45	1.314	1.332	1.336
60	1.166	1.190	1.193
75	1.050	1.072	1.070
90	0.990	1.001	0.999
105	0.972	0.975	0.974
120	0.970	0.970	0.970

Примечание:

1. Трендовый процесс с фиксированной лаговой структурой;
2. Классическое движение возрастных групп;
3. Изменение возрастной рождаемости по Р. Истерлину.

ки зрения трендового механизма. Для этого достаточно, чтобы перечисленные выше факторы лишь препятствовали увеличению второй координаты распределения по желаемому числу детей.

Глава 2

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИЙ

Динамика распределения населения по возрастам играет принципиальную роль в экстраполяционных моделях с горизонтом до 50 лет. Она в существенной мере объясняет наблюдаемое изменение демографических переменных и некоторых характеристик социальной структуры. Кроме того, движение возрастного состава становится носителем более долговременных тенденций, представляя своего рода инерционную составляющую, модифицирующую воздействие факторов, влияющих на население. С точки зрения трендового механизма демографического перехода модели возрастного состава — это модели нижнего уровня; имеющие дело с переменными условного поколения. Для практических задач — это основные балансовые модели, управляемые внешними параметрами рождаемости и смертности.

Модели такого типа называются также моделями передвижки возрастов, или популяционными моделями. Их считают уже классическими. Первые формализации относятся к XVIII в. В начале XX в. было исследовано интегральное уравнение, затем разностное уравнение и матричная формализация. В книге Ю. М. Свирежева и Д. О. Логофета [1978, гл. 2] и в хрестоматии Н. Кейфица и Д. Смита [1977] приведена библиография.

Основной переменной в модели популяции является $P(t, a)$ — численность населения, которому к началу года t исполнилось a лет, но еще не исполнилось $a+1$ -го года: $a=0, \dots, \omega$. Если $B(t)$ — число родившихся в течение календарного года t , то в замкнутом населении справедливо балансовое равенство $P(t, a) = B(t-a-1)L(a)$. Доля $L(a)$, примерно соответствующая вероятности дожить до середины возрастного интервала $[a, a+1]$, в демографии называется числом живущих (оно может зависеть от t). Методы расчета этих величин по статистическим данным обсуждаются в гл. 3. Как правило, популяционные модели строятся для одного пола. Это или женское население, с которым статистические источники соотносят возрастное распределение рождаемости, или все население без различия пола. В долгосрочной экстраполяции последний вариант вполне приемлем, именно он будет использоваться в дальнейшем. Проблемы формализации зависимости рождений от соотношения численности полов — объект многочисленных и интересных разработок [Дарский, 1972].

1. РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛОТКИ

Основное разностное уравнение модели имеет вид

$$B(t) = \sum_{a=0}^{\omega} B(t-a-1) \Lambda(a) F(a). \quad (1)$$

Здесь $\Lambda(a)$ — нормированные числа живущих,

$$\Lambda(a) = \frac{L(a)}{T(0)}.$$

Коэффициенты $F(a)$ будут называться приведенными возрастными коэффициентами рождаемости. Они означают количество рожденных возрастной группой $P(t, a)$ в течение календарного года t .

Пусть ядро уравнения $K(a) = \Lambda(a) F(a)$ не зависит от времени. Суммирование достаточно проводить в интервале $[\alpha, \beta]$ фертильных (обладающих ненулевой рождаемостью) возрастных групп. Обычно принимается $\alpha = 15$ и $\beta = 49$ лет. Начальные условия можно задать в форме набора $\{B(-1), \dots, B(-\beta-1)\}$. Таким образом, уравнение переписывается в неоднородной форме:

$$B(t) = \sum_{a=0}^{t-1} K(a) B(t-a-1) + G(t). \quad (2)$$

Здесь $G(t) = \sum_{a=t}^{\omega} K(a) B(t-a-1)$ отражает вклад начальных условий. При $t > \beta$ полагается $G(t) = 0$.

Пусть $N(a) = P(0, a)$ — начальное распределение населения по возрастам. Тогда после преобразований начальная функция $G(t)$ выражается в форме

$$G(t) = \sum_{\xi=0}^{\beta-t} F(\xi+t) \Lambda(\xi+t) N(\xi) / (\Lambda(\xi) L(0)).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^{\beta+1} - K(0)\lambda^\beta - K(1)\lambda^{\beta-1} - \dots - K(\beta) = 0. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть в интервале $[\alpha, \beta]$ имеются по крайней мере две возрастные группы $n-1$ и $m-1 > n-1$ (считая от нуля) с ненулевыми элементами ядра $K(n-1)K(m-1) > 0$. Пусть числа n и m взаимно просты. Тогда существует единственный положительный корень $\lambda_0 = \operatorname{Re} \lambda_0 > 0$. Он простой, причем $|\lambda_j| < \lambda_0$ для всех $j = 1, \dots, \beta$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \exp \rho$ и $\rho = r + iw$. Характеристическое уравнение переписывается в виде

$$\lambda^{\beta+1} (1 - U(\exp \rho)) = 0, \text{ где } U(\exp \rho) = \sum_0^{\beta} K(a) \exp(-\rho(a+1)).$$

В действительной области $U'(\lambda) < 0$, причем $U(0+) = \infty$ и $U(\infty) = 0$. Поэтому существует в точности одна точка пересечения $U(\lambda_0) = 1$. Очевидно $\lambda_0 \geq 1$ тогда и только тогда, когда $R_0 = U(1) \geq 1$. Эта величина называется в демографии нетто-коэффициентом воспроизводства населения, в отличие от брутто-коэффициента $GRR = \sum F(a)$. Последний примерно равен половине суммарной рождаемости.

Простота главного корня очевидна в силу строгой монотонности функций $U(\lambda)$ в действительной области. Действительная часть характеристического уравнения переписывается в тригонометрической форме:

$$\operatorname{Re} U(\exp \rho) = \sum_0^{\beta} K(a) \exp(-r(a+1)) \cos w(a+1) = 1.$$

Невозможно, чтобы одновременно $\cos wt = \cos wn = 1$, поскольку в этом случае или $w=0$, т. е. корень действителен, или $wt = 2\pi k_2$ и $wn = 2\pi k_1$, откуда $t = (k_2/k_1)n$, т. е. t и n кратны. Поэтому для любого комплексного корня существует по крайней мере одна компонента из $[\alpha, \beta]$, такая что $\cos w(a+1) < 1$. Если бы оказалось, что $\exp(-r) \leq \lambda_0^{-1}$, то $\operatorname{Re} U(\lambda) < U(\lambda_0) = 1$. Поэтому $\exp(-r) > \lambda_0^{-1}$ и, значит, $|\lambda_0| < \lambda_0$. Лемма доказана.

Представление характеристического уравнения в тригонометрической форме дает также грубую оценку максимального периода колебаний. Для мнимой части справедливо равенство

$$-\operatorname{Im} U(\exp \rho) = \sum_0^{\beta} K(a) \exp(-r(a+1)) \sin w(a+1) = 0. \quad (4)$$

Всегда существует по крайней мере одна компонента $a \in [\alpha, \beta]$ с ненулевым $K(a) \sin w(a+1)$. Для того чтобы равенство (4) выполнялось, синус должен по крайней мере один раз изменить знак. Таким образом, $(\beta+1)w > \pi$. Отсюда оценка максимального периода колебаний $T < 2(\beta+1)$ [Гинзбург, 1970, с. 265]. Можно показать, что если период комплексного корня $T > \beta$, то этот корень является алгебраически простым. Практически максимальный период колебаний не превышает 30 лет и соответствующий корень всегда простой.

Условие существования некратных возрастных групп с положительными коэффициентами рождаемости, постулируемое леммой, — демографически естественное требование, гаранти-

рующее строгую доминантность главного корня и, следовательно, стабилизацию решений. Оно интерпретируется как перекрытие, перемешивание поколений. Множество τ лет, представимых в форме $t = km + ln$, где k и l — натуральные числа, очевидно включается во множество таких t , что $B(t-1)$ существенно зависит от компоненты $N(m-1)$ начального распределения, т. е. в разложении $B(t-1) = \sum c_{ta} N(a)$ коэффициент $c_{t,m-1} > 0$. Можно доказать следующее утверждение. Для того чтобы множество τ включало все натуральные числа, начиная с некоторого числа, необходимо и достаточно, чтобы числа n и m были взаимно просты [Мак-Фарланд, 1969].

В соответствии с леммой 1 любое решение уравнения (1) представляется в форме

$$B(t) = Q_0 \lambda_0^t + \sum_{i=1}^{\beta} Q_i(t) \lambda_i^t. \quad (5)$$

Здесь Q_0 — константа и Q_i — многочлены от времени степени ниже, чем кратность соответствующего корня. Константа Q_0 и коэффициенты многочленов однозначно определяются начальным распределением $N(a)$. Подстановка общего решения (5) в неоднородное уравнение (2) после преобразований дает равенство

$$\begin{aligned} Q_0 \left(1 - \sum_{a=0}^{t-1} K(a) \lambda_0^{-a-1} \right) &= G(t) \lambda_0^{-t} - \\ &- \sum_{i=1}^{\beta} Q_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right)^t \left(1 - \sum_{a=0}^{t-1} K(a) \lambda_i^{-a-1} \right). \end{aligned}$$

Следует учесть, что все $\lambda_0, \dots, \lambda_\beta$ — корни характеристического уравнения (3). Поэтому суммированием по t от 0 до β предыдущее равенство сводится к

$$\begin{aligned} Q_0 \sum_{t=0}^{\beta} \sum_{a=t}^{\beta} K(a) \lambda_0^{-a-1} &= \sum_{t=0}^{\beta} G(t) \lambda_0^{-t} - \\ &- \sum_{i=1}^{\beta} Q_i \sum_{t=0}^{\beta} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right)^t \sum_{a=t}^{\beta} K(a) \lambda_i^{-a-1}. \end{aligned}$$

Замена порядка суммирования по a и по t во втором члене правой части приводит к равенству

$$\sum_{i=1}^{\beta} Q_i \frac{U(\lambda_i) - U(\lambda_0)}{1 - \lambda_i/\lambda_0} = 0.$$

Такая же замена в левой части дает $Q_0 \sum_0^{\beta} (a+1) K(a) \lambda_0^{-a-1} = Q_0 \bar{A}$. Если начальные условия таковы, что $B(t) = B_0 \lambda_0^t$ при $-1 - \beta < t < -1$, т. е. фактический темп роста совпадает с главным собственным числом, то решение поддерживает темп роста постоянным: $Q_0 = B_0$ и $Q_j = 0$ для всех $j > 0$. А в общем случае

$$Q_0 = \frac{\sum_0^{\beta} G(t) \lambda_0^{-t}}{\sum_0^{\beta} (a+1) K(a) \lambda_0^{-a-1}} = \frac{\sum_0^{\beta} G(t) \lambda_0^{-t}}{\bar{A}}. \quad (6)$$

Первый корень был выделен произвольно. Представление (6) справедливо для любого коэффициента при простом корне Q_j с заменой λ_0 на λ_j . Главному корню, таким образом, всегда соответствует положительная степенная функция в разложении (5): $Q_0 > 0$, если только $N(a) > 0$ и $N \neq 0$. Величина \bar{A} в равенстве (6) называется средним возрастом рождающего контингента в стабильном населении. Ее смысл будет пояснен ниже.

В силу доминирования главного корня темп роста асимптотически стабилизируется:

$$\lim_t \frac{B(t+1)}{B(t)} = \lambda_0. \quad (7)$$

Таким образом, именно коэффициент Q_0 представляет асимптотический вклад исходной возрастной структуры.

2. АППРОКСИМАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Существуют удобные формулы приближенного решения характеристического уравнения (3) и прежде всего нахождения главного корня λ_0 . Его называют Перроновым числом, коэффициентом Лесли или коэффициентом Лотки. В демографии он называется также истинным коэффициентом роста, или коэффициентом режима. Те же названия применяют и по отношению к $\rho_0 = \ln \lambda_0$ или пределу $\lim_{\Delta t} \frac{\lambda_0(\Delta t) - 1}{\Delta t}$, где Δt — шаг модели (в нашем случае он равен 1 году).

Обозначим начальные и центральные моменты ядра разностного уравнения:

$$R_k = \sum_0^{\beta} (a+1)^k K(a), \quad \mu_k = \sum_0^{\beta} (a+1-\mu)^k K(a)/R_0.$$

Здесь R_0 — нетто-коэффициент воспроизводства населения, а $\mu = \mu_1 = R_1/R_0$ — средний возраст нетто-распределения рож-

даемости. Обычно он лежит в интервале [25, 34] года. Дисперсия $\sigma^2 = \kappa^2 = R_2/R_0 - \mu^2 \in [25, 50]$ лет (см. табл. 5).

Таблица 5

**Характеристики ядра уравнения Лотки и первый комплексный корень
в различных фазах демографического перехода
(население Швеции)**

Год	Фаза демографического перехода	R_0	μ	σ^2	r_1	$2\pi/w_1$
1780	0	1.21	32.34	43.29	-0.0216	32.31
1830	1	1.35	32.32	40.08	-0.0171	32.97
1880	2*	1.43	32.47	41.50	-0.0159	32.12
1930	2	0.81	29.99	44.35	-0.0418	31.88
1965	3	1.15	27.08	33.03	-0.0325	27.35

* Период европейского типа брачности.

Источник: Keyfitz N., Flieger W. World population: an analysis of vital data. Chicago, 1968, p. 83—87.

После логарифмирования и деления на нетто-коэффициент характеристическое уравнение превращается в

$$-\ln R_0 + 2\pi k i = \ln \frac{U(\exp \rho)}{R_0} = \ln \frac{1}{R_0} \sum_0^{\beta} K(a) \exp(-\rho(a+1)),$$

где $k=0, 1, 2, \dots$. Правую часть можно разложить в ряд по степеням ρ вблизи $\rho=0$. Легко видеть, что коэффициенты разложения пропорциональны центральным моментам:

$$-\ln R_0 + 2k\pi i = -\kappa_1 \rho + \frac{1}{2} \kappa_2 \rho^2 - \frac{1}{3!} \kappa_3 \rho^3 + \dots \quad (8)$$

При разложении в ряд левой части характеристического уравнения (3) коэффициенты были бы пропорциональны моментам κ_a , которые значительно больше по величине, чем центральные. Кроме того, величина первых центральных моментов мало отличается в разных населениях, несмотря на существенные различия R_k .

Для вычисления главного корня и первой комплексной пары обычно ограничиваются квадратичным приближением:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \rho^2 - \mu \rho + \ln R_0 - 2\pi k i = 0. \quad (9)$$

Игнорирование центральных моментов, начиная с третьего, практически эквивалентно сглаживанию $K(a)/R_0$ нормальной плотностью со средним μ и дисперсией σ^2 . В книге Дж. Полтарда [1973] приведены аппроксимации для случая гамма-рас-

пределения, которое представляется более естественным, если учсть асимметричность ядра.

Если записать отдельно минимую часть равенства (9), то после преобразований окажется

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{\mu - \sigma^2 r_k}{k}. \quad (10)$$

Действительный корень соответствует $k=0$, т. е. меньшему из корней параболы $\frac{1}{2}\sigma^2 r^2 - \mu r + \ln R_0$, комплексные корни — пересечению левой ветви этой параболы с гиперболой:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r^2 - \mu r + \ln R_0 = \frac{\sigma^2 k^2}{2} \left[\frac{2\pi}{\mu - \sigma^2 r} \right]^2$$

(рис. 4). Пересечения правой ветви нарушили бы неравенство $\rho_0 > r_k$.

Квадратичное приближение демонстрирует уменьшение амплитуды с увеличением периода колебаний. Самые низкочастотные колебания (волны поколений) имеют период $T_1 = \mu - r_1 \sigma^2$, практически очень близкий к μ . Во всех известных примерах $r_1 < 0$, так что $T_1 > \mu$.

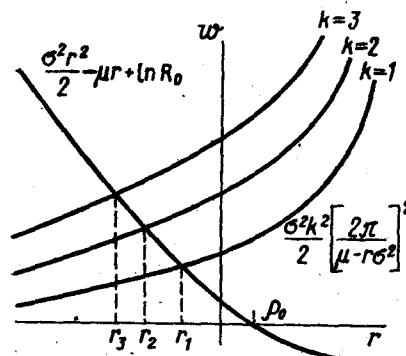


Рис. 4. Квадратичная аппроксимация решений характеристического уравнения

ся длиной поколения. Очевидно, в асимптотическом населении $T = \ln R_0 / \rho_0$.

Обозначим

$$A(\rho) \equiv \frac{-d \ln U(\exp \rho)}{d\rho} = \frac{\sum (a+1) K(a) \exp(-\rho(a+1))}{U(\exp \rho)} \approx \mu - \sigma^2 \rho.$$

Очевидно, $A(0) = \mu$ и $A(\rho_0) = \bar{A}$. Из равенства

$$0 = \ln U(\exp \rho_0) = \ln U(\exp 0) - \int_0^{\rho_0} A(\tau) d\tau \approx \rho_0 T - \mu \rho_0 + \frac{\sigma^2 \rho_0^2}{2}$$

получается квадратичная оценка длины поколения

$$\mu - \frac{\sigma^2 \rho_0}{2} \approx T = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\rho_0} A(\tau) d\tau \approx \frac{\bar{A} + \mu}{2}.$$

Практически T близко к среднему возрасту нетто-распределения рождаемости μ . При этом в большинстве примеров $T < \mu < T_1$, поскольку $\rho_0 > 0$ и $r_1 < 0$. Отклонение $|T - \bar{A}| < 2\% T$ [Коул, 1972]. Для грубой оценки используется формула Коула — Демени $T \approx \mu - 0.7 \ln R_0$.

Асимптотическая длина поколения мало отличается в различных примерах. Пусть \tilde{T} — приближенная оценка длины поколения, $\tilde{\rho} = \ln R_0 / \tilde{T}$ и $U(\exp \tilde{\rho}) = 1 + \delta$. Линейное приближение дает

$$U(\exp \rho) \approx 1 - \bar{A} U(\exp \rho_0) (\rho - \rho_0).$$

Поэтому $\frac{\Delta \rho_0}{\Delta T} \approx -\frac{\delta}{\bar{A}} \approx -\delta/T$. Учитывая $T = \ln R_0 / \rho_0$ и, следовательно, $\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{\Delta \rho_0}{\rho_0}$, получим эффективную аппроксимационную формулу Коула:

$$\rho_0 = \tilde{\rho} + \frac{\delta}{\tilde{T} - \delta/\tilde{\rho}}. \quad (11)$$

Пользоваться формулой (11) вместе с исходным приближением Коула — Демени практически наиболее удобно.

Распределение собственных чисел подробно изучено Э. Дж. Коулом [1972] для непрерывного аналога уравнения Лотки. В этом случае характеристическое уравнение имеет счетный набор нулей, если ядро — непрерывная функция. В книге Коула [1972, с. 77] приведены регрессионные формулы, связывающие оценки первой комплексной пары корней с параметрами ядра: μ , отношением медианного возраста к среднему и долей $K(a)$, заключенной в интервале $[3/4\mu, 5/4\mu]$. Вторая пара комплексных корней определяет период $T_2 = 2\pi/\omega_2$ около 20 лет, третья — около 13 лет. Справедлива довольно точная формула $\omega_3 = \omega_2 + 0.27$. Для больших k справедливо $\omega_{k+1} - \omega_k \approx 2\pi/\beta$. Действительные части убывают очень быстро. Не только модули собственных чисел, но и модули коэффициентов $|Q_j|$ убывают с уменьшением периода колебаний. Корни с периодом меньше 6 лет практически не оказывают влияния на решение. Аппроксимация с точностью до второго корня:

$$\lambda_0^{-t} B(t) \approx Q_0 + 2|Q_1| \left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_0} \right)^t \cos \left(\frac{2\pi}{T_1} t + \varphi_1 \right) \quad (12)$$

(здесь φ_1 — начальная фаза) оказывается вполне удовлетворительной при $t > 25$ лет, если, конечно, ядро не зависит от времени. Оценки Q_0 и $|Q_1|$ в уравнении (12) можно получить регрессионно при варьировании начальной фазы.

3. МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ЛЕСЛИ

Матричная формализация движения возрастного состава населения стала использоваться с начала 40-х годов. Основной переменной здесь является $\omega+1$ -мерный вектор $P(t) = \{P(t, a)\}$. Он отражает состояние населения на точную дату — начало календарного года t , в отличие от основной переменной уравнения Лотки, относящейся к временному интервалу.

Движение вектора описывается уравнением

$$P(t+1) = S P(t). \quad (13)$$

Матрица передвижки, или матрица Лесли S имеет следующий вид:

$$S = \begin{pmatrix} F_0, F_1, \dots, F_\beta, \dots, F_{\omega-1}, F_\omega \\ s_0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0 \\ 0, s_1, \dots, 0, \dots, 0, 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0, 0, \dots, s_{\beta-1}, 0, \dots, 0, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, s_\beta, \dots, 0, 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, s_{\omega-1}, 0 \end{pmatrix}.$$

В ней заняты только верхняя строчка и поддиагональ. При этом $F(a) = 0$ для $a=1, \dots, \alpha-1$ и $a=\beta+1, \dots, \omega$. Элементы поддиагонали $s(a) = L(a+1)/L(a) \in (0, 1)$ называются коэффициентами передвижки. Первые $1+\beta$ компонент вектора, очевидно, не зависят от остальных, поэтому вместе с уравнением (13) будет рассматриваться «укороченное» уравнение $P(t+1) = \Phi P(t)$, где матрица Φ размерности $1+\beta$ занимает левый верхний угол матрицы S .

Характеристическое уравнение имеет простой вид

$$\begin{aligned} 0 &= \det |\lambda I - S| = \lambda^{\omega-\beta} \det |\lambda I - \Phi| = \\ &= \lambda^{\omega-\beta} \cdot (\lambda^{\beta+1} - K(0) \lambda^\beta - \dots - K(\beta)). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, набор собственных чисел матрицы Лесли состоит из собственных чисел разностного уравнения Лотки (они совпадают с собственными числами матрицы Φ) и нуля, имеющего кратность $\omega-\beta$. Матрица Φ — неотрицательная неразложимая матрица, поэтому существование положительного собственного числа (Перронова числа) λ_0 вытекает из теоремы Перрона — Фробениуса. Для строгого доминирования необходима и достаточна примитивность Φ . Пусть n_1, \dots, n_r — степени λ в характеристическом уравнении (14), соответствующие положительным компонентам ядра: $K(\beta - n_k) \lambda^{n_k} > 0$. Обычно условие примитивности — равенство единице индекса импрай-

митивности [Маркус и Минк, 1972, с. 173], который определяется как наибольший общий делитель, $1=h(\Phi)=$ и.о.д. $(\beta+1-n_r, n_r-n_{r-1}, \dots, n_2-n_1)$, очевидно, эквивалентно требованию леммы 1 о существовании двух некратных возрастных групп.

Примитивность матрицы Φ означает положительность, начиная с некоторой, всех ее степеней $\Phi^t > 0$, т. е. условие перекрытия поколений. Индексом примитивности $\text{Index}(\Phi)$ называется минимальное натуральное t , начиная с которого все степени матрицы положительны. Это — минимальное время перекрытия поколений, алгебраическая мера быстроты стабилизации матрицы Лесли. Общая нижняя оценка индекса примитивности равна $\beta+1$ [Маркус и Минк, 1972, с. 174], Б. Парлетт [1970] получил очень важную формулу

$$\text{Index}(\Phi) = (\alpha + 1) \text{Int} \left[\frac{\beta - 1}{\beta - \alpha} \right] + \beta + 1, \quad (15)$$

где символом Int обозначена целая часть. Независимость индекса примитивности от элементов матрицы Φ (если они не обращаются в нуль) — существенное свойство, на которое опирается доказательство теоремы Коула — Лопеса о слабой эргодичности.

Индекс примитивности зависит от временного шага модели. Его значения таковы:

шаг, лет	1	5	10	15
индекс примитивности, лет	66	70	70	90

Замедление динамики возрастной структуры в моделях с большим шагом легко наблюдается численно.

Правый собственный вектор матрицы Лесли $Su=\lambda u$ при $\lambda \neq 0$ имеет вид $u_a = \text{const} \Lambda(a) \lambda^{-a}$. Его первые $1+\beta$ компонент составляют собственный вектор матрицы Φ . В дальнейшем u будет обозначать нормированный вектор

$$u_a = \frac{\Lambda(a) \lambda_0^{-a}}{\Sigma \Lambda(a) \lambda_0^{-a}} = b^* \Lambda(a) \lambda_0^{-a}, \quad (16)$$

соответствующий главному собственному числу λ_0 . Это вектор структуры, инвариантной относительно передвижки возрастов. Население с возрастным составом u называется стабильным населением, а при $\lambda_0=1$ — стационарным.

С использованием (1) общее число родившихся в стабильном населении выражается равенством $B(t) = \lambda_0 b^* \text{POP}(t)/L(0)$, где $\text{POP}(t) = \sum_{a=0}^{\omega} P(t, a)$. Таким образом, b^* примерно соответ-

ствует общему коэффициенту рождаемости $b^* \approx \frac{2B(t)}{(1+\lambda_0)\text{POP}(t)}$, как он определяется в статистике. В стационарном населении

$1/b^* = E_0/L(0)$, где $E_0 = \Sigma L(a)$ — средняя продолжительность жизни (см. гл. 3.2).

Каждая строчка в векторном равенстве (13), начиная со второй, описывает переход от группы $P(t, a)$ к старшей на год возрастной группе: $P(t+1, a+1) = s(a)P(t, a)$. Поэтому рождения в течение календарного года t соответствуют в среднем возрасту родителей $a+1$. Средний возраст всего рождающего контингента в стабильном населении таким образом равен

$$\frac{\sum F(a)(a+1)b^*\Lambda(a)\lambda_0^{-a}}{\sum F(a)\Lambda(a)b^*\lambda_0^{-a}} = \frac{\sum K(a)(a+1)\lambda_0^{-a-1}}{\sum K(a)\lambda_0^{-a-1}} = \bar{A},$$

что совпадает с определением \bar{A} , данным выше (формула (6)).

Правый собственный вектор собственного числа 0 имеет с точностью до множителя вид $e_\infty = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Таким образом, геометрическая кратность нулевых собственных чисел в матрице Лесли равна единице [Парлетт, 1970].

Левый собственный вектор $v' S = v' \lambda$ (штрих — знак вектора-строки) для ненулевого собственного числа имеет вид

$$v_j = \text{const} \sum_{a=j}^{\beta} F(a) \lambda^{j-a-1} \Lambda(a)/\Lambda(j) = \text{const} y_j / u_j,$$

где $y_j = \sum_i^{\beta} F(a) u_a$. Первые $\beta+1$ его компонент составляют левый собственный вектор матрицы Φ . При этом $y_j = 0$ для $j > \beta$. Далее v' будет обозначать левый собственный вектор Перрона числа, нормированный равенством $(v', u) = 1$. После преобразований оказывается для $j < \beta$

$$v_j = \frac{1}{\lambda_0 \bar{A} b^*} \frac{y_j}{u_j}. \quad (17)$$

Величины v_j называются возрастными коэффициентами демографического потенциала, или коэффициентами Фишера. Их роль ясна из теоремы стабилизации.

Теорема о стабилизации. Пусть выполнены условия леммы 1.

Пусть u и v' — правый и левый собственные векторы матрицы Лесли, соответствующие главному корню и нормированные равенством $(v', u) = 1$. Тогда

$$S' \lambda_0^{-t} = (u, v') + \epsilon(t), \quad (18)$$

где норма $|\epsilon(t)|$ ограничена величиной, пропорциональной $t^\beta |\lambda_1| \lambda_0^{-t}$, а λ_1 — максимальное по модулю после λ_0 собственное число.

Доказательство [Поллард, 1973]. Матрица S представляется в Жордановой форме $S = T \text{diag}\{\lambda_0, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_k, \mathcal{J}_0\} T^{-1}$. Здесь \mathcal{J}_i — Жордановы клетки, соответствующие собственным числам и имеющие порядок, равный их кратности. В частности, клетка

\mathcal{I}_0 соответствует ω — β -кратному нулю. В силу строгой доминантности главного корня $S^t \lambda_0^{-t} = TDT^{-1} + \varepsilon(t)$, где $D = \text{diag}(1, 0, 0, \dots, 0)$. Скорость сходимости определяется максимальным возможным порядком Жордановой клетки, равным β (так как главный корень — простой).

Поскольку u — правый собственный вектор главного корня, $u = TDT^{-1}u$. Отсюда $T^{-1}u = DT^{-1}u = \bar{u}$ (1, 0, ..., 0), где \bar{u} — некоторая константа. Аналогично $u'T = v(1, 0, \dots, 0)'$. Таким образом, $(u, v') = TT^{-1}uv'TT^{-1} = uvTDT^{-1}$. Но $uv = 1$ в силу нормировки. Теорема доказана.

Таким образом, замкнутое население при постоянном режиме воспроизводства, что отражается независимостью от времени матрицы Лесли, приобретает асимптотическую возрастную структуру, не зависящую от начальной, а именно структуру стабильного населения, определенного матрицей Лесли. Пусть начальный вектор нормирован $N(a) = POP\bar{N}(a)$. Тогда в соответствии с (18) асимптотически решение имеет вид

$$POP S^t \lambda_0^{-t} = POP u(v', \bar{N}).$$

Последний множитель отражает вклад начальной возрастной структуры в увеличение численности населения. Эта величина называется демографическим потенциалом или нетто-потенциалом демографического роста. Интересная интерпретация дана Н. Кейфицем [1977]. Поскольку

$$V = (v', \bar{N}) = \frac{1}{\lambda_0 \bar{A} b^*} \sum_0^{\beta} y_a \frac{\bar{N}(a)}{u_a}, \quad (19)$$

демографический потенциал представляется естественной мерой инстабильности возрастной структуры. Сумма весов $\sum y_a = \lambda_0 \bar{A} b^*$. Как легко показать, демографический потенциал связан с константой Q_0 в уравнении Лотки равенством $V = L(0) Q_0 \lambda_0^{-1} b^{*-1}$.

Частные демографические потенциалы v_a отражают вклад возрастной группы $\bar{N}(a)$ начального распределения населения в суммарную численность асимптотического. Нормированная функция v_a мало меняется от населения к населению. Она имеет единственный максимум при $a \approx 20$ лет, быстро возрастает от $v_0 \approx 0.5 \max v_a$ и убывает практически до нуля при $a > 40$. Сумма $\sum v_a$ может быть названа брутто-потенциалом при рождении. Она отражает суммарный (по поколениям) вклад в асимптотическое население одной женщины начального поколения при условии, что эта женщина проживет до последнего фертильного возраста ($\beta = 49$ лет).

С понятием демографического потенциала связан эффект так называемого «демографического чуда». Если в течение самого промежутка времени коэффициенты рождаемости умень-

шаются до уровня простого воспроизведения (нетто-коэффициент $R_0=1$), то численность населения может продолжать возрастать исключительно за счет нестационарности возрастной структуры. Демографический потенциал, рассчитанный по отношению к этим редуцированным коэффициентам рождаемости, выражается в силу (19) равенством

$$VZ = \frac{E_0}{L(0)\mu R_0} \sum_0^{\beta} \frac{\bar{N}(a)}{\Lambda(a)} \sum_{\xi=a}^{\beta} F(\xi) \Lambda(\xi). \quad (20)$$

Здесь μ — средний возраст нетто-распределения рождаемости (см. с. 32).

На русском языке отсутствует общепризнанный термин для названия VZ . Смешивание V и VZ иногда приводит к путанице. По-видимому, впервые характеристику VZ изучил Ж. Буржуа-Пиша [1977]. Поэтому ниже VZ будет называться нетто-потенциалом Буржуа-Пиша, в отличие от V , который логично называть потенциалом П. Венсана [Пирожков, 1976, с. 110—120].

Нормированные веса потенциала VZ мало отличаются от населения к населению. Это дало возможность Ж. Буржуа-Пиша, используя стандартные веса, получить приближенную формулу. В книге С. И. Пирожкова [1976, с. 117] приведены оценки VZ для модельных (типовых) стабильных распределений населения по возрастам, основанных на типовых распределениях рождаемости и смертности по возрастам.

Для оценки VZ можно использовать также удобную асимптотическую формулу [Поллард, 1973]. Если возрастная структура до «демографического чуда» была стабильна $\bar{N}(a) = b * \Lambda(a) \lambda_0^{-a}$, то формула (20) преобразуется к виду

$$VZ = \frac{R_0 - 1}{R_0} \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{b * E_0}{\mu L(0)}. \quad (21)$$

В книге А. Я. Кваси [1974, с. 28] приведены значения потенциала Буржуа-Пиша для союзных республик СССР. В книге С. И. Пирожкова [1976, с. 119] — потенциала Венсана для Украинской ССР за ряд лет. Наши оценки (табл. 6) получены следующим образом. Данные о возрастном распределении населения (оба пола вместе) и коэффициенты рождаемости, относящиеся к дате переписи — началу 1970 г., были интерполированы сплайнами для получения одногодичных распределений (подробнее см. гл. 3.1). Возрастные распределения смертности следующие: для Эстонской, Украинской, Грузинской ССР — коэффициенты Украинской ССР 1973/74 г., для Таджикской ССР — коэффициенты смертности Узбекской ССР 1973/74 г. [Андреев, 1979, с. 19]. Коэффициенты смертности также были интерполированы до одногодичных. После этого по приведенным выше формулам были рассчитаны параметры ста-

Таблица 6

**Параметры стабильного населения некоторых союзных республик СССР
1969/70 г.**

	Эстонская ССР	Украин- ская ССР	Грузинская ССР	Таджики- ская ССР
Брутто-коэффициент воспроизводства <i>GRR</i>	1.0707	1.0209	1.3061	2.9478
Нетто-коэффициент воспроизводства R_0	1.0224	0.9751	1.2458	2.6544
Средний возраст нетто рождаемости μ	26.74	26.52	27.29	30.79
Дисперсия ядра σ^2	29.23	30.91	33.76	51.27
Коэффициент Лесли λ_0	1.0008	0.9991	1.0081	1.0331
Коэффициент рождаемости b^*	14.76	13.82	18.98	38.73
Средний возраст рождающегося контин- гента \bar{A}	26.72	26.55	27.02	29.19
Демографический потенциал (Венсана) V				
1970 г.	1.0488	1.1714	1.0819	0.9493
1980 г.	1.0199	1.1073	1.0658	1.0029
2000 г.		1.0261	1.0107	
Год стабилизации	1992	2019	2028	1990
Демографический потенциал Буржуа- Пиша VZ				
1970 г.	1.0690	1.1451	1.2905	1.5895
1980 г.	1.0397	1.0829	1.2531	1.6220
2000 г.	1.0119	1.0032	1.2037	1.6323

Рассчитано по: Итоги переписи населения 1970 г. Том 2. М., 1972, 21, 37, 61, 73; Народонаселение стран мира — справочник. М., 1978, с. 70, 75—78.

Бильного населения и осуществлена экстраполяция с фиксированной матрицей Лесли для оценки асимптотических параметров. Миграционные изменения не учитывались. Годом стабилизации назван год, после которого неравенство $|V - 1| < 0.01$ не нарушалось. Поскольку демографический потенциал учитывает инстабильность возрастных групп моложе 49 лет, общая стабилизация наступает не ранее чем через 40 лет после отмеченного года. Конечно, данные табл. 6 ни в коей мере не являются прогнозными оценками, поскольку базируются на заведомо ложной предпосылке о неизменности режима воспроизводства населения в экстраполяционном периоде.

4. ТЕОРЕМА КОУЛА — ЛОПЕСА

Тезис о независимости асимптотической структуры от начальной, или о «забывании» начальной возрастной структуры даже при изменяющейся во времени матрице Лесли, был сформулирован Э. Дж. Коулом в 50-х годах. Теорема доказана А. Лопесом в 1961 г. Приведенное здесь доказательство принадлежит Дж. Полларду [1973] (см. также статью Б. Парлетта [1970]).

Теорема Коула—Лопеса. Пусть выполнены условия примитивности матрицы $\Phi(t)$ при любом $t \geq 0$. Пусть элементы матрицы Лесли $S(t) = \|s_{kj}\|$ либо равны нулю для любого t , либо равномерно ограничены $0 < \epsilon < s_{kj}(t) < M < \infty$. Пусть начальные векторы $P(0) \geq 0$ и $q(0) \geq 0$ имеют ненулевые компоненты из числа первых $1 + \beta$. Тогда существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{k,j} \left| \frac{P_k(t)}{q_k(t)} - \frac{P_j(t)}{q_j(t)} \right| = 0, \quad (22)$$

где $P(t)$ и $q(t)$ — результаты процесса передвижки (13), стартующего из начальных векторов $P(0)$ и $q(0)$.

Доказательство опирается на свойство положительной матрицы сжимать метрику (22). Метрику (22) можно было бы заменить метрикой Гильберта—Биркгофа, для которой установлены удобные условия сжатия [Черемных, 1975, с. 165—166].

Лемма 2. Пусть матрица $H(t)$, начальные векторы $x(0)$ и $y(0)$ положительны. Элементы матрицы равномерно ограничены $0 < \epsilon < H_{kj}(t) < M < \infty$. Векторы $x(t)$ и $y(t)$ порождаются процессом $x(t+1) = H(t)x(t)$, стартующим из начальных условий $x(0)$ и $y(0)$ соответственно. Тогда существует предел $\lim_t x_j(t)/y_j(t) = \bar{u}$. Этот предел одинаков для всех компонент вектора.

Доказательство. Обозначим

$$r_t = \min_j x_j(t)/y_j(t) \leq \max_j x_j(t)/y_j(t) = R_t.$$

Пусть $L(t)$ — индекс, на котором достигается минимум, а $u(t)$ — индекс, на котором достигается максимум. Для всех t справедливо $r_t \leq r_{t+1}$ и $R_t \geq R_{t+1}$. Действительно, опуская индекс t , запишем

$$(Hx)_j = RH_{ju}y_u + \sum_{k \neq u} H_{jk}x_k = (R - r)H_{ju}y_u + \sum_{k \neq u} H_{kj}x_k + rH_{ju}y_u \geq (R - r)H_{ju}y_u + r \sum_{(k)} H_{kj}y_k \geq r(H_y)_j.$$

Аналогично для R_t .

Таким образом, R_t — убывающая и r_t — возрастающая переменные, обе они ограничены и имеют пределы. Достаточно показать, что эти пределы совпадают.

Координаты вектора $x_k(t)$ можно записать в форме $x_k(t) = \rho_k(t)y_k(t)$, где $r_t = \rho_{L(t)}(t) \leq \rho_k(t) \leq \rho_{u(t)}(t) = R_t = r_t + \delta_t$. Запишем переход к моменту $t+1$:

$$\rho_k(t+1) = r_t + \frac{\Sigma(\rho_l(t) - r_t)H_{kl}(t)y_l(t)}{\Sigma H_{kl}(t)y_l(t)}.$$

Сумма неотрицательных членов, стоящая в числителе, не меньше одного из слагаемых $(\rho_{u(t)} - r_t) H_{ku(t)} y_{u(t)}(t)$. Поэтому

$$\rho_k(t+1) \geq r_t + \delta_t \frac{H_{ku(t)}(t) y_{u(t)}(t)}{\sum H_{kl}(t) y_l(t)} = r_t + \delta_t \eta_{kt}. \quad (23)$$

Очевидно, $0 < \eta_{kt} < 1$.

Найдем не зависящие от времени границы отношения $y_k(t)/y_l(t)$. Индукцией по времени устанавливается, что

$$\frac{y_k(t+1)}{y_l(t+1)} = \frac{\sum H_{kl}(t) y_l(t)}{\sum H_{jl}(t) y_l(t)} > \frac{\epsilon}{M} \frac{\sum y_l(t)}{\sum y_l(t)} = \frac{\epsilon}{M} = \frac{1}{W}.$$

Аналогично $y_k(t)/y_j(t) < W$. Отсюда

$$\eta_{kt} > \bar{\eta}_t = \frac{H_{ku(t)}(t)}{W \sum H_{kl}} > \frac{\epsilon}{W(n+1)M} = \frac{1}{(n+1)W^2},$$

где $(n+1)$ — размерность матрицы H , компоненты которой нумеруются, начиная с нуля.

Вернемся к формуле (23). Используя оценку для η_{kt} , получим

$$r_{t+1} \geq r_t + \bar{\eta}_t \delta_t \geq r_t + \frac{\delta_t}{(n+1)W^2}.$$

Аналогично можно доказать, что $R_{t+1} \leq R_t - \bar{\xi}_t \delta_t$, где $1 > \bar{\xi}_t \geq -1/(W^2(n+1))$. Таким образом, для разницы $R_t - r_t$ справедливо неравенство

$$\delta_{t+1} \leq \delta_0 \prod_{\tau=0}^t (1 - \bar{\xi}_\tau - \bar{\eta}_\tau) \leq \delta_0 \left(1 - \frac{2}{(n+1)W^2}\right)^{t+1} \rightarrow 0.$$

Поэтому пределы R_t и r_t совпадают, что и доказывает лемму. Последнее соотношение определяет скорость сходимости.

Доказательство теоремы Коула—Лопеса. Рассмотрим укороченные векторы $x(t)$ и $y(t)$ размерности $1+\beta$, порожденные процессом $x(t+1) = \Phi(t)x(t)$. Условия теоремы в силу формулы Парлетта приводят к неизменности во времени индекса примитивности $NT = \text{Index}(\Phi(t))$. Начиная с «момента перемешивания» NT векторы $x(t)$ и $y(t)$ будут положительными.

Разобьем последовательность $x(t)$ на подпоследовательности по правилу $x(l, T) = x(T \cdot NT + l)$. Аналогично $y(l, T)$. Движение определяется уравнениями

$$x(l, T+1) = H(T)x(l, T) = \prod_{\tau=0}^{NT-1} \Phi(T \cdot NT + l + \tau)x(l, T).$$

Матрица $H(T)$ строго положительна и равномерно ограничена: $e^{NT} < H_{kj}(T) < M^{NT}$. Таким образом, условия леммы 2 выполнены. Значит, существуют пределы

$$\lim_T x_j(l, T)/y_j(l, T) = \bar{u}_l,$$

не зависящие от j , но, вообще говоря, зависящие от l .

Ясно, что, выбрав $T(\delta)$ достаточно большим, можно обеспечить неравенство $|x_j(t)/y_j(t) - x_k(t)/y_k(t)| < \delta$ при $t > T(\delta)$ и всех $j, k \in [0, \beta]$. Что касается последних $\omega - \beta$ координат векторов $P(t)$ и $q(t)$, то, очевидно, $P_a(t)/q_a(t) = x_\beta(t+\beta-a)/y_\beta(t+\beta-a)$. Теорема доказана. Теорему Коула — Лопеса называют теоремой о слабой эргодичности.

Глава 3

КОНСТРУКЦИЯ ПЕРЕДВИЖКИ ВОЗРАСТОВ

Для того чтобы модель движения населения типа модели Лесли могла быть применена в демографической экстраполяции, необходимо решить ряд задач. Прежде всего по имеющейся статистической информации рассчитать параметры модели. Прогнозные гипотезы формулируются в терминах небольшого числа агрегированных внешних переменных. Они определяются моделями более высокого уровня или задаются как сценарные переменные. Необходимо связать с ними векторы параметров модели Лесли. Кроме того, почти всегда оказывается, что объект моделирования не замкнут относительно миграционного движения. Необходимое в этой связи расширение модели представляет собой принципиальную задачу.

Этим вопросам посвящена глава. Их решения позволяют построить буферные конструкции, связывающие трендовые управляющие переменные с быстрыми переменными возрастной структуры населения.

1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Трудность, с которой прежде всего сталкиваются в практической реализации модели Лесли, заключается в том, что статистической информации недостаточно для модели с шагом, равным одному году. В задачах экстраполяции не обязательно вычислять вектор возрастной структуры для каждого года. Как правило, данные о возрастном распределении населения, рождаемости, смертности и миграции агрегированы по пятилетним группам.

Решение лежит в одном из трех направлений: интерполяция имеющихся данных для получения одногодичных и передвижка с шагом один год; передвижка агрегированной возрастной структуры и интерполяция по времени итоговых переменных; отказ от диагональной структуры матрицы Лесли, означающий независимость шага по времени от длины возрастной группы.

В последнем случае уравнение перехода от группы $P(t, a)$ к группе $P(t+1, a+1)$ заменяется на $P(t+1, a+1) =$

$= s(a)P(t, a) + \sigma(a+1)P(t, a+1)$. Эксперименты показывают, что это неудобный путь. При не зависящих от времени коэффициентах σ возрастная структура на протяжении 10—15 лет перестает соответствовать фактической динамике, хотя экстраполяция общей численности населения может быть успешной.

Первый и второй пути приводят к примерно одинаковым ошибкам экстраполяции на горизонте 20—30 лет. Но первый путь удобнее для отладки модели, поскольку вычисленная возрастная структура в этом случае может быть сопоставлена с фактической в любой временной точке, а не только в точках, отличающихся от начальной на число лет, кратное пяти. Кроме того, легче описать связь малых изменений управляющих переменных с изменениями параметров модели, чем допустить большие изменения в течение шага.

Для интерполяции возрастных распределений удобно использовать сплайны. По-видимому, впервые они были применены в демографической модели М. Месаровича и Э. Пестеля. Этот метод эффективнее построения интерполяционного многочлена, сплайны более устойчивы к добавлению новых узлов в интерполяционную сетку и, как правило, не приводят к неожиданным эффектам при краткосрочной экстраполяции.

Сплайнам посвящена обширная литература. Укажем лишь книги Ю. С. Завьялова, Б. И. Квасова, В. Л. Мирошниченко [1980], Дж. Форсайта и др. [1980], Д. Пуарье [1981]. Но стандартные программы в большинстве библиотек отсутствуют. Кроме того, возникают также практические вопросы, требующие специального рассмотрения.

Пусть задана интерполяционная сетка x_1, \dots, x_n и связанные с ней значения функции. Сплайном нечетной степени m называется функция $s(x)$, сохраняющая непрерывность во внутренних точках вплоть по $m-1$ производной, такая, что на каждом отрезке сетки она является многочленом степени m . Эта функция имеет очевидно $(m+1)(n-1)$ параметров. Условия совпадения с узлами интерполяции, непрерывность самой функции и ее производных определяют $mn-2m+n$ условий. Таким образом, число степеней свободы равно $m-1$.

Нахождение коэффициентов сплайна сводится к решению линейной системы уравнений. Наиболее часто применяются кубические сплайны. Сплайн-функцию удобно выразить не через коэффициенты составляющих ее многочленов, а через более естественные параметры $\sigma_j = s''(x_j)$, которые иногда называют моментами. На каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ сплайн-функция равна

$$s(x) = ws_{j+1} + \bar{ws}_j + \frac{1}{6} h_j^2 [(w^3 - w) \sigma_{j+1} + (\bar{w}^3 - \bar{w}) \sigma_j], \quad (1)$$

где $h_j = x_{j+1} - x_j$, $w = (x - x_j)/h_j$ и $\bar{w} = 1 - w$. Условие непрерывности первой производной во внутренних узлах сетки при-

водит к системе из $n-2$ уравнений относительно σ_j , матрица которой трехдиагональна. Дополнительные условия часто определяются в форме

$$s''(x_1) = \Theta_1 s''(x_2), \quad s''(x_n) = \Theta_n s''(x_{n-1}), \quad (2)$$

где Θ_j — задаваемые константы. Как правило, $|\Theta_j| < 2$, при чем численные значения констант можно выбрать исходя из качественных характеристик интерполирующей кривой [Пуарье, 1981, с. 31]. В книге Дж. Форсайта и др. [1980, с. 88] в качестве дополнительного условия формализовано совпадение $s'''(x_1)$ и третьей производной обычной кубической параболы, проведённой через первые четыре узла интерполяционной сетки. Аналогичное условие (ниже оно будет называться условием Форсайта) может быть задано на правом конце сетки. Важно, что ни условие (2), ни условия Форсайта не меняют трехдиагональности системы уравнений, так что решение легко получается одной итерацией Гауссова исключения. Точность решения высокая даже для мини-ЭВМ. В книге Дж. Форсайта и др. [1980, с. 86—94] подробно описан этот метод и приведена программа на фортране.

Другой метод решения основан на одном из разложений сплайна по базису функций [Завьялов и др., 1980, с. 15—18]:

$$s(x) = \sum_{\xi=0}^m b_\xi x^\xi + \sum_{i=2}^{n-1} b_{m+i-1} [x - x_i]_+^m. \quad (3)$$

Здесь $[x]_+ = \max(0; x)$. Координаты базисного разложения $b = (b_0, \dots, b_{n+m-2})$ находятся как решения линейной системы $Ab = y$ порядка $n+m-1$. Матрица A легко строится алгоритмически и зависит только от узлов сетки x_1, \dots, x_n . Вектор y составляют значения функции в узлах интерполяции. Дополнительные условия здесь удобнее всего задать в форме дополнительных узлов интерполяционной сетки, в которых не происходит разрыв старшей производной сплайна (псевдоузлы). Имея в памяти ЭВМ обратную матрицу для фиксированной сетки и набора псевдоузлов, можно легко вычислить коэффициенты базисного разложения сплайна в однотипных задачах интерполяции. В статье Д. Р. Мак-Нейла и др. [1980] подробно описан этот метод, приведены некоторые стандартные обратные матрицы.

Практически, когда возникает задача интерполяции возрастной структуры населения, возрастных коэффициентов миграции или смертности, охватывающих 17—18 агрегированных возрастных групп, построенная матрица условий A становится плохо обусловленной и точность решения на ЭВМ неудовлетворительной. Приведенные ниже данные относятся к интерполяции возрастной структуры населения одного из регионов РСФСР. В качестве дополнительных условий были заданы псевдоузлы, соответствующие фактическому распределению по

одногодичным возрастным группам. Оценка числа обусловленности $\text{cond}(A)$ [Форсайт и др., 1980, с. 54—61] для кубического сплайна превышает 10^5 , при $m=5$ превышает 10^8 , при $m=7$ превышает 10^{12} , при $m=9$ превышает 10^{16} . Порядок матрицы соответственно возрастает с 20 до 26. Обусловленность системы чувствительна к добавлению новых узлов. Однако, если интерполяционная сетка включает 7—8 узлов (как в случае возрастных коэффициентов рождаемости), система для нахождения коэффициентов базисного разложения легко решается.

В большинстве случаев демографические переменные, подлежащие интерполяции, заданы в виде средних по возрасту величин. Так, суммарная численность пятилетней возрастной группы $[a, a+4]$ определяется равенством

$$\bar{P}(t, a) = \sum_{\xi=a}^{a+4} P(t, \xi).$$

Таким образом, интерполяции предшествует переход к кумулятивным переменным: $Q(a+5) = Q(a) + \bar{P}(t, a)$ и $Q(0) = 0$. После интерполяции осуществляется возврат к первым разностям. Иногда возникают дополнительные трудности, поскольку первые разности могут после интерполяции оказаться отрицательными или потерять видимую гладкость.

Возрастной состав населения, как правило, задается по пятилетним возрастным группам, причем последняя группа охватывает возраст 80 лет и старше. Интерполяционная сетка включает 18 точек. Два метода интерполяции одинаково удобны. Это — использование кубических сплайнов с дополнительным узлом $P(t, 0)$ при условии Форсайта на левой границе и условии $\Theta_n = 0$ на правой или нахождение коэффициентов базисного разложения кубического сплайна (3) при двух псевдоузлах, определяемых численностью $P(t, 0)$ и численностью возрастных групп старше 85 лет. Если рождаемость мало меняется в течение времени, можно обойтись и без дополнительного узла $P(t, 0)$.

Численность первой однолетней группы рассчитывается в зависимости от числа родившихся в предыдущие годы и коэффициентов смертности. Оценка численности старших возрастных групп может быть более или менее произвольной, поскольку мало сказывается на общем качестве интерполяции и на расчетах по модели. Дополнительные интерполяционные формулы приведены, например, в [ОО.1, 1981, с. 284—285].

Распределение населения по возрастам служит основой оценки и прогнозирования ряда социально-экономических и собственно демографических показателей. Это такие величины, как численность населения в трудоспособном возрасте, общее число занятых, численность определенной социальной группы, число хозяйств и семей, численность групп по брачному состоянию, число лиц, проживающих отдельно от семей, и т. п.

Для описания динамики таких показателей ищется зависимость вида $H(t) = \sum h(a)P(t, a)$, либо взвешенная сумма строится отдельно для прироста и убыли, или для чистого прироста расчетного показателя. Во всех случаях возникает задача оценки коэффициентов возрастного распределения и их прогнозирования.

По сути дела, это и есть основная принципиальная задача оценивания параметров и экстраполяционного прогнозирования, решение которой определяет качество демографической модели. В этой главе будут продемонстрированы примеры решения названной задачи. Подходы сводятся к сглаживанию возрастных коэффициентов аналитической кривой (как в случае коэффициентов миграции — гл. 3.3 или рождаемости — гл. 4.1), построению типовых табличных распределений (система таблиц смертности Коула—Демени — гл. 3.2), попыткам выяснить характер возрастного распределения различий между коэффициентами, описывающими похожие нации (логиты Брасса — гл. 3.2).

Таблица 7

Коэффициенты распределения некоторых демографических показателей по возрастным группам

Возрастные группы, лет	1	2	3	4
До 20 лет	0.40	0.022	0.025	0.024
20—24	0.87*	0.085*	0.138	0.127
25—29			0.363	0.324
30—34	0.94*	0.030*	0.487	0.448
35—39			0.486	0.476
40—44	0.92*	0.043*	0.482	0.494
45—49			0.497	0.522
50—54	0.80	0.095	0.495	0.548
55—59	0.43	0.127	0.472	0.567
60—64	0.09**	0.164**	0.445	0.580
65 и старше			0.398	0.585

* Средние для соответствующих десятилетних возрастных групп.

** 60 лет и старше.

Примечание:

- 1) доля занятых в данной возрастной группе населения СССР, 1970 г.;
- 2) доля одиноких (не имеющих семьи) лиц в населении СССР, 1970 г.;
- 3) удельный вес лиц, являющихся главами семей и хозяйств, в населении Венгрии, 1960 г.;
- 4) удельный вес лиц, являющихся главами семей и хозяйств, — нормативные коэффициенты ООН для стран с высоким уровнем дохода.

Источники: Боярский А. Я., Валентей Д. И., Кваша А. Я. Основы демографии. М., 1980, с. 94; Волков А. Г. Изменение величины и состава семей в СССР. — В кн.: Демографическая ситуация в СССР. М., 1976, с. 24; ООН: Методы перспективных исчислений числа хозяйств и семей. Нью-Йорк, 1973, с. 67, 160.

Наиболее простая гипотеза в рамках последнего направления предложена для прогнозирования числа семей и хозяйств [ООН, 1973, с. 102—103]. Пусть $h \in (0, 1)$. Предполагается, что возможные изменения коэффициентов с течением времени так же, как и их отличия от нормативных коэффициентов, подчиняются зависимости $h(a) = 1 - (1 - h(a))^{\delta}$, где $h(a)$ — нормативное распределение, или распределение, наблюдаемое в предыдущие годы, а δ параметр. По наблюдаемому значению расчетного показателя или его прироста параметр δ можно легко найти, решив балансовое уравнение. Экстраполяция сводится к прогнозной вилке, определенной верхним и нижним возможными значениями параметра. В табл. 7 даны примеры возрастных коэффициентов $h(a)$, приведенных сплайн-интерполяцией к стандартной шкале пятилетних возрастных групп.

2. ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ

Методы интерполяции возрастных коэффициентов смертности тесно связаны с построением так называемых таблиц смертности, т. е. с построением по наблюдаемым данным вектора коэффициентов передвижки (поддиагонали матрицы Лесли).

Теоретическая таблица смертности представляет собой следующую конструкцию. Числами доживающих $l(a)$ называются доли доживающих до точного возраста (т. е. до дня рождения) a . Они относятся к когорте, родившейся в течение некоторого возрастного интервала, различиями внутри которого мож-

но пренебречь. Очевидно, $l(a) = \prod_{\xi=0}^{a-1} (1 - q(\xi))$, где $q(a) = 1 - p(a)$

— вероятность умереть в возрасте a лет. В начальном возрасте $l(0) = 1$, а $q(0)$ называется коэффициентом младенческой смертности IMR применительно к когорте. В последней группе $l(\omega+1) = 0$.

Пусть $l(a)$ — непрерывная плотность чисел доживающих.

Числом живущих называется интеграл ${}_h L(a) = \int_a^{a+h} l(\xi) d\xi$,

означающий среднее число лет, которые проживает представитель когорты в возрастном интервале $[a, a+h]$ лет. Если $h=1$, этот индекс не ставится. Линейное приближение числа живущих:

$${}_h L(a) = \frac{h}{2} (l(a) + l(a+h)) \quad (4)$$

оказывается приемлемым, если возрастной интервал $h=1$ году. В противном случае обычно применяется кубическое приближение.

$${}_h L(a) = \frac{13}{24} h (l(a) + l(a+h)) - \frac{h}{24} (l(a-h) + l(a+2h)), \quad (5)$$

которое получается интегрированием равенства (1) при подстановке вместо вторых производных их выражений через разности второго порядка.

Средний коэффициент смертности определяется равенством $_m(a)_L(a) = l(a) - l(a+h)$, а коэффициент передвижки — равенством $_s(a)_L(a) = _L(a+h)$. Для последней группы полагают $m(\omega) = l(\omega)/L(\omega)$ и $s(\omega) = 0$.

Ожидаемая продолжительность жизни тех, кто достиг точного возраста a , определяется как условное математическое ожидание года смерти. Легко показать, воспользовавшись линейным приближением, что продолжительность оставшейся

жизни $E(a) = \sum_a^{\infty} L(\xi)/l(a)$. Пусть $a' > a$. Тогда справедливо

неравенство $a+E(a) < a'+E(a')$. Пусть начиная с некоторого a вероятность умереть $q(a)$ становится возрастающей функцией возраста (практически это проявляется по крайней мере начиная с $a=15$). Тогда справедливо неравенство $E(a) > E(a')$. Суммарная продолжительность жизни старших больше, чем младших, но среднее оставшееся им число лет жизни меньше.

Наблюдаемые коэффициенты смертности $_M(a)$, относящиеся к пятилетним возрастным группам по состоянию на начало календарного года, рассчитываются как отношение умерших в возрасте $[a, a+4]$ года в течение календарных лет t и $t-1$ к удвоенной численности $P(t, a)$. Таким образом, они отличаются от средних коэффициентов таблицы смертности, во-первых, тем, что не представляют какого-либо реального поколения (когорты), а соответствуют календарному году, т. е. условному поколению. В частности, коэффициент младенческой смертности $IMR(t)$, отнесенный к календарному году, не равен в точности $q(0)$ — характеристике реального поколения. Во-вторых, наблюдаемые коэффициенты смертности, в отличие от средних, отражают неравномерность числа рождений в каждой из пятилетних групп.

Конечно, возрастное распределение смертности зависит не только от календарного года, но и от истории когорты. Но в условиях мало меняющейся смертности эта зависимость должна быть невелика. Изменения смертности в течение демографического перехода определяются сокращением экзогенной смертности. Эти изменения в среднем одинаковы для различных когорт и поэтому могут быть описаны в терминах условного поколения. Напротив, основные изменения рождаемости в течение демографического перехода определяются распространением нового демографического поведения от поколения к поколению. Когортные отличия, следовательно, играют принципиальную роль, поэтому рождаемость описывается в терминах трендовых переменных, меняющихся от поколения к поколению.

Если наблюдаемые коэффициенты смертности известны для одногодичных возрастных интервалов, с помощью линейного приближения легко рассчитываются все составляющие таблицы смертности. Для пятилетних возрастных групп такое приближение также применяется, хотя оно не точно. Существует много методов построения кратких (т. е. относящихся к пятилетним интервалам) таблиц смертности. В большинстве случаев предполагается, что ${}_5m(a) = {}_5M(a)$. Более точные методы описаны, например, в книге Н. Кейфица [1977].

Если сопоставить определение среднего коэффициента смертности $mL = -\Delta l$ и кубическое приближение (5), получится равенство, связывающее изменение чисел доживающих по возрастам. При $h=5$ оно имеет вид

$$\left(1 + \frac{65}{24} M(a)\right) l(a+5) = \left(1 - \frac{65}{24} M(a)\right) l(a) + \\ + \frac{5}{24} M(a) (l(a+10) + l(a-5)). \quad (6)$$

Пусть найдено начальное приближение чисел доживающих. Равенство (6) определяет итеративный процесс коррекции: по уже скорректированным значениям $l(a)$ и $l(a-5)$ и еще не скорректированному $l(a+10)$ находится новое скорректированное значение $l(a+5)$. Начальные значения $l(0)=1$ и $l(5)=0$ не участвуют в процессе так же, как и конечное $l(90)=0$. Как пишет Н. Кейфиц [Кейфиц и Флайджер, 1971, с. 136], процесс сходится за «четыре или около того итераций», т. е. коррекция (6) перестает ощутимо изменять распределение чисел доживающих. В этой же книге приведена программа на фортране более общего итеративного процесса.

Процесс (6) оказывается удобным, если предварительно оценено $l(5)$. Пусть $u(h)$ — величина, определенная равенством

$${}_hL(0) = h - (h - u(h)) (1 - l(h)).$$

Если эта величина известна, то по коэффициенту младенческой смертности и среднему коэффициенту смертности первой пятилетней группы вычисляются числа доживающих в начальных точках. Н. Кейфиц и У. Флайджер [1971, с. 139] предложили регрессионную оценку:

$$u(1) = 0.07 + 1.7 \cdot IMR / (1 - 0.66 \cdot IMR), \quad u(5) = 1.5 + u(1).$$

Недостающие точки начального возрастного интервала хорошо приближаются гиперболической функцией $l(a) = (aA+B) / (a+B)$. Коэффициент младенческой смертности и наблюдаемый коэффициент смертности первой пятилетней группы также связываются регрессионным уравнением.

Краткая таблица смертности (табл. 8) построена итеративным методом. Для получения полной (т. е. одногодичной) таб-

лицы смертности достаточно интерполировать плотность чисел доживающих, после чего прочие составляющие таблицы смертности легко восстанавливаются линейным приближением. Интерполяция проводится кубическими сплайнами с условиями Форсайта на обеих границах. Узел $l(1)$ должен быть включен.

Таблица 8

**Краткая модельная таблица смертности
Коула — Демени (уровень 21).
Средние данные для обоих полов**

Возраст	$l(a)$	$M(a)$	$L(a)$	$E(a)$
0	1.00000	0.03710	0.974	68.057
1	0.96406	0.00215	3.832	69.584
5	1.00000	0.00923	4.806	68.057
10	0.95581	0.00085	4.760	66.175
15	0.95176	0.00065	4.751	61.455
20	0.94867	0.00115	4.731	56.646
25	0.94323	0.00160	4.698	51.958
30	0.93572	0.00175	4.659	47.354
35	0.92757	0.00200	4.615	42.748
40	0.91833	0.00255	4.564	38.152
45	0.90670	0.00365	4.495	33.608
50	0.89029	0.00545	4.396	29.178
55	0.86633	0.00832	4.249	24.912
60	0.83098	0.01282	4.034	20.858
65	0.77927	0.02002	3.721	17.066
70	0.70477	0.03190	3.276	13.590
75	0.60027	0.05202	2.666	10.498
80	0.46157	0.08454	1.941	7.877
	0.30121	0.17773	1.695	5.627

Рассчитано по: Методы исчисления демографических показателей по неполным данным. Нью-Йорк, ООН, 1971, с. 201.

В памяти ЭВМ удобно держать дезагрегированный по одногодичным возрастным интервалам вектор $L(a)$ или в некоторых случаях вектор $m(a)$, восстанавливая на каждом шаге коэффициенты передвижки линейной процедурой. Для решения задачи экстраполяции и задачи восстановления коэффициентов смертности по неполным данным было бы удобно иметь гибкое преобразование названных векторов в зависимости от изменения агрегированных сценарных переменных. К числу последних логично отнести продолжительность предстоящей жизни при рождении E_0 и коэффициент младенческой смертности IMR , уровень которого во многом характеризует тип возрастного распределения смертности (а значит, косвенно и распре-

деление по причинам смерти). Прогнозная динамика этих переменных должна быть ясна из качественных сценарных гипотез, внешних по отношению к балансовой модели населения.

Преобразование может опираться на аналитическую конструкцию, аппроксимирующую коэффициенты смертности или числа доживающих. Используется, например, модификация кривой Гомперца—Мейкхема [Кардаш, 1979]. Альтернативой является коррекция наблюдаемых коэффициентов смертности приближением их к типовым (модельным), соответствующим заданным сценарным переменным. Такими типовыми таблицами смертности являются прежде всего таблицы Э. Коула—П. Демени [1966].

Идея построения таблиц Коула—Демени интересна. Было рассмотрено 326 наборов коэффициентов $m(a, k)$ при $a=0, 1, 5, \dots, 75$, относящихся к разным населениям и разным моментам времени (k — индекс примера). При каждом a коэффициенты упорядочивались по величине, после чего было собрано 23 модельных набора, соответствующих одинаковым рангам (уровням), но разным k . Характер отклонений от модельных наборов при одинаковом уровне смертности позволил разделить наборы коэффициентов на четыре группы. Группа «Запад» совпадает с модельными наборами. Для каждой группы строились регрессионные зависимости, связывающие возрастные коэффициенты с агрегированным параметром $E(10)$. Подобный подход применил А. Роджерс [1975, с. 146—154] для анализа возрастных коэффициентов миграции.

Тесно связанным с этим подходом представляется поиск класса преобразований векторов смертности,ключающего все возможные преобразования, при условии, что в определяющих смертность факторах не произойдет чрезвычайных или очень значительных изменений. Если же такие изменения предусматриваются моделью, необходимо перейти к специальным моделям экзогенной смертности [Басалаева, 1978, гл. 1].

В этом направлении важным является результат У. Брасса [1977]. Логитом называется величина $0,5 \ln(1-l(a))/l(a)) = Y(a)$. В отличие от чисел доживающих логиты изменяются на всей числовой оси, причем представляют собой почти линейную функцию a . Поэтому в соответствии с гипотезой логиты разных наборов чисел доживающих связаны линейной зависимостью $Y(a) = A + B\bar{Y}(a)$, если числа доживающих $l(a)$ и $\bar{l}(a)$ не отличаются радикально, во всяком случае, если они относятся к одному и тому же населению. Параметр A отражает изменение общего уровня смертности, B — отношение детской смертности и смертности старших групп. Параметры линейного преобразования были рассчитаны У. Брассом для перехода от уровня к уровню в каждой группе таблиц Коула—Демени.

Аналогичный подход развит Е. М. Андреевым [1979]. Изменения средних коэффициентов смертности аппроксимируются линейной зависимостью:

$$m(a) = \bar{m}(a)(A + Ba). \quad (7)$$

Здесь $\bar{m}(a)$ — коэффициенты смертности демографически похожего населения, специально подобранные типовые коэффициенты или коэффициенты, наблюдаемые в предыдущие годы. Сглаживание (7) сохраняет силу и при значительных, долговременных изменениях возрастного распределения смертности. Эволюция кривой смертности в течение демографического перехода, в частности преобразование *U*-образного распределения в *J*-образное, отражается движением параметров уравнения (7) [Андреев, 1979; Андреев и Добровольская, 1979].

Ниже приведены регрессионные оценки параметров линейного преобразования, связывающего наблюдаемые коэффициенты смертности с модельными (типовыми) коэффициентами $\bar{m}(a)$, взятыми из таблицы Коула—Демени (см. табл. 8). Регрессионные зависимости для логитов имеют худшие статистические характеристики. Наряду с преобразованной зависимостью (7) использовалась зависимость $m(a) = A_0 + A\bar{m}(a) + + Ba$. Во всех случаях коэффициенты смертности измерены в промилле, а возраст $a = 0.2$ (начальный год пятилетней группы). Результаты оценивания таковы (в скобках — стандартные ошибки параметров):

население СССР, 1973/74 г. [Андреев, 1979, с. 19]:

$$m(a) = 0.258 + 0.542 \bar{m}(a) + 0.548 a$$

$$(1.726) \quad (0.028) \quad (0.235), \quad R^2 = 0.980, \quad DW = 1.587,$$

городское население СССР, 1971/72 г. [Андреев, 1979, с. 13]:

$$m(a) = -1.379 + 0.525 \bar{m}(a) + 0.785 a$$

$$(1.544) \quad (0.025) \quad (0.210), \quad R^2 = 0.984, \quad DW = 1.654,$$

сельское население СССР, 1971/72 г. [Андреев, 1979, с. 13]:

$$m(a) = 0.277 + 0.539 \bar{m}(a) + 0.517 a$$

$$(1.565) \quad (0.025) \quad (0.213), \quad R^2 = 0.983, \quad DW = 1.799,$$

население Узбекской ССР, 1973/74 г. [Андреев, 1979, с. 19]:

$$m(a) = 0.318 + 1.205 \bar{m}(a) - 0.035 a \bar{m}(a)$$

$$(0.499) \quad (0.049) \quad (0.003), \quad R^2 = 0.997, \quad DW = 2.100.$$

Зависимость (7) удобна и для интерполяции по a , причем результаты мало зависят от коэффициентов смертности в старших возрастных группах. Значение m (85) может быть выбрано произвольным из широкого интервала. Однако чисто экспрополяционный прогноз неудовлетворителен.

Допуская некоторую вольность, предположим, что зависимостью (7) связаны коэффициенты, дополняющие коэффициен-

ты передвижки, т. е. $(1 - s(a)) = (1 - \bar{s}(a))(A + B(a+1))$ при $a = -1, 0, \dots, \omega - 1$. Здесь по определению $s(-1) = L(0)$. Линеаризация по параметрам A и B приводит к приближенному выражению

$$L(a) = L(a) \left[1 + (A-1) \ln L(a) + \frac{1}{2} aB \ln \bar{L}(a) \right].$$

Непосредственно получается оценка первого параметра:

$$A = 1 + (L(0) - \bar{L}(0)) / (\bar{L}(0) - 1). \quad (8)$$

По управляющей переменной IMR первое число живущих $L(0)$ может быть легко рассчитано. После этого по формуле (8) рассчитывается параметр A . Второй параметр при известном первом можно вычислить, решив уравнение

$$E_0 = \sum_{a=0}^{\omega} \prod_{\xi=0}^a \left[1 - \frac{\bar{L}(\xi-1) - \bar{L}(\xi)}{\bar{L}(\xi-1)} (A + B\xi) \right]. \quad (9)$$

Стоящее в правой части выражение — монотонная функция B , поэтому нахождение нуля становится простым. По найденным параметрам восстанавливается новый вектор чисел живущих. Иногда вместо (9) удобнее решить уравнение

$$\begin{aligned} E_0 - \bar{E}_0 = & - (A-1) \sum_{a=0}^{\omega} \bar{L}(a) \sum_{\xi=0}^a (1 - s^{-1}(\xi-1)) - \\ & - B \sum_{a=0}^{\omega} \bar{L}(a) \sum_{\xi=0}^a \xi (1 - s^{-1}(\xi-1)). \end{aligned}$$

[Баркалов и Ким, 1982], полученное на основе линейного приближения.

Согласованное или противоречивое изменение управляющих переменных деформирует кривую смертности, не приводя к невозможным значениям параметров $A < 0$ или $A + B\omega < 0$, если сценарное изменение E_0 не достигает фантастических значений — около 10 лет за 1 шаг. Аналогичная процедура для логитов приводит к менее удобным формулам. Конечно, преобразование (8) — (9) значительно удобнее для шага, равного одному году.

3. О МОДЕЛИРОВАНИИ МИГРАЦИИ

Классическая модель Лесли имеет дело с замкнутым однородным населением. Принципиальная проблема заключается в том, что демографически однородное население почти никогда не может быть замкнутым в миграционном отношении, а замкнутое — однородным. Миграционные потоки даже при малом чистом объеме (сальдо) могут существенно изменить возрастное распределение населения и его демографические характеристики.

А. Роджерс [1975] впервые предложил балансовую модель передвижки возрастов, включающую население двух или более регионов, каждый из которых считается демографически однородным, но обменивается населением с другими регионами. В целом демографическая система замкнута. Собственно модель Роджерса не обязательно относится к территориальному движению. Балансовые уравнения могут также описать перемещение из одной социальной группы в другую, перемещение занятых из одного сектора народного хозяйства в другой, изменение брачного состояния и т. д. Во всех этих случаях изменение ~~рас~~ного показателя может быть представлено как сумма составляющих, каждая из которых — линейная функция возрастного состава одной из групп населения [Роджерс, 1983].

Модель Роджерса является моделью нижнего уровня — точным аналогом модели Лесли, описывающим движение условного поколения. Будучи балансовой, модель учитывает зависимость миграции только от региона выбытия, но не от региона прибытия и игнорирует ряд других эффектов, описанных частными моделями. Модель Роджерса играет роль балансовой основы моделирования неоднородного населения. В книге Ф. Уилькинса и А. Роджерса [1978] приведены программы на фортране. В книге С. В. Соболевой [1980] описано применение модели к населению СССР (8 регионов).

Ниже рассматривается формализация модели Роджерса. Для упрощения описан случай двух регионов. Движение возрастных групп определяется так называемой мультирегиональной таблицей смертности — матричным аналогом обычной таблицы смертности однородного населения. Наряду с вероятностью смерти $q_j(a)$ в теоретическую таблицу смертности включаются также вероятности $p_{ij}(a)$ миграции из региона i в регион j в течение возрастного интервала $[a, a+h]$ лет. При этом $p_{ii} = 1 - q_i - \sum_{i \neq j} p_{ij}$. Аналог чисел доживающих — квадратная матрица $l(a)$, построенная по столбцам:

$$l(a) = \begin{pmatrix} l_{11}, & l_{21} \\ l_{12}, & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Элемент $l_{ij}(a)$ означает долю уроженцев региона i , доживающую до точного возраста a в регионе j . Начальная матрица $l(0)=1$ совпадает с единичной, конечная $l(\omega+1)$ — с нулевой. Динамика задается уравнением $l(a+h) = p(a)l(a)$, где $p(a)$ — матрица вероятностей перехода $p_{ij}(a)$. Движение каждого столбца матрицы доживающих независимо от другого.

Число живущих ${}_hL_{ij}(a)$ означает среднее число человеколет, проживаемых уроженцами региона i в регионе j в течение возрастного интервала $[a, a+h]$. Векторы чисел живущих дают возможность построить различные характеристики дожития, в частности, продолжительность предстоящей жизни применительно к населению, сгруппированному как по региону рожде-

ния, так и по региону проживания [Уилкинс и Роджерс, 1978, с. 33—43].

Матрица чистого выбытия населения $M(a)$ представляет собой аналог среднего коэффициента смертности. Она определяется равенством

$$M(a) = \begin{pmatrix} m_{10} + M_{12}, & -M_{21} \\ -M_{12}, & m_{20} + M_{21} \end{pmatrix}.$$

Здесь M_{ij} — средний коэффициент миграции из региона i в регион j , а m_{ij} — средний возрастной коэффициент смертности. Произведение матриц

$$M(a)L(a) = (I - p(a))l(a) \quad (10)$$

представляет собой матрицу, составленную из объемов чистого выбытия (смерти и сальдо миграции) в четырех описываемых моделью группах населения. Здесь $L(a)$ — матрица, составленная из чисел живущих.

Линейное приближение

$$L(a) = \frac{h}{2} (I + p(a))l(a) \quad (11)$$

является матричным аналогом равенства (4). В частности, для последней возрастной группы $L(\omega) = M(\omega)^{-1}$. Используя равенства (10) и (11), можно получить линейное приближение матрицы переходных вероятностей

$$p(a) = \left[I + \frac{h}{2} M(a) \right]^{-1} \left[I - \frac{h}{2} M(a) \right]$$

и матрицы передвижки возрастов:

$$s(a) = (I + p(a+h))p(a)(I + p(a))^{-1},$$

которая определяется условием $L(a+h) = s(a)L(a)$.

С помощью модели можно описать движение всех четырех групп населения, объединенных по региону рождения или по региону проживания. Матрица передвижки оказывается аналогичной матрице Лесли, но имеет блочную структуру. А. Роджерс [1975] исследовал аналитические свойства модели, установив результаты, аналогичные результатам классической модели Лесли (стабилизацию и наличие асимптотической структуры).

Так же, как и в случае одного региона, наблюдаемые элементы матрицы выбытия относятся к условному поколению. Изменения коэффициентов миграции логично связывать именно с переменными, зависящими от календарного года.

Распределение коэффициентов миграции $M_{ij}(a)$ по возрастам имеет довольно сложный вид. На рис. 5 представлены два типичных распределения, одно из которых обладает малой, а второе — большой дисперсией. В обоих случаях ярко выражен-

ный максимум возрастной плотности приходится на группу 20—24 года. Максимум соответствует основной составляющей миграции трудоспособного населения. Во втором случае максимум смещен к старшим возрастным группам и более асимметричен. Это может быть объяснено значительной долей возвратной миграции. Миграционный поток возвращающихся на прежнее место жительства после временной работы, учебы, в связи с рождением детей или по другим причинам должен иметь более расплывчатое возрастное распределение и больший средний возраст. Миграция до трудоспособного возраста отвечает перемещению детей вместе с родителями. Минимальный уровень a_l приходится на младший школьный возраст.

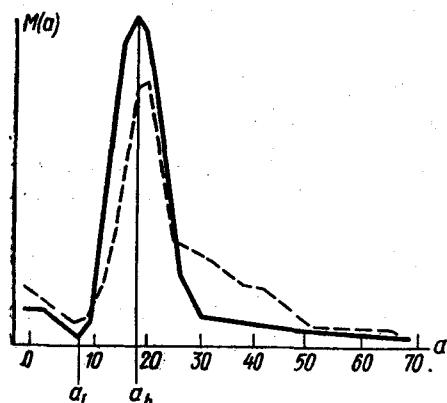


Рис. 5. Примеры возрастных коэффициентов миграции

А. Роджерс и Л. Кастро [1981] предложили многопараметрическую кривую, призванную описать разнообразные варианты распределения коэффициентов миграции по возрастам. Кривая приближает плотность, т. е. нормированный вектор коэффициентов $M(a)/GMR$, где $GMR_{ii} = \sum_{(a)} M_{ii}(a)$ — суммарный коэффициент миграции. Упрощенный вариант кривой (8 параметров) имеет вид

$$M(a)/GMR = A_1 \exp(-\alpha_1 a) + A_2 \exp[-\alpha_2(a - \mu_2) - \exp(-\lambda_2(a - \mu_2))] + A_0. \quad (12)$$

Первая составляющая представляет миграцию детей, индуцированную миграцией родителей, вторая — поток населения трудоспособного возраста. В более полном варианте (11 параметров) кривая включает и третью составляющую, соответствующую миграции лиц старше трудоспособного возраста. Как и вторая, она имеет вид двойной экспоненты. Эта кривая (КМНТ) в демографии впервые применена в работах Э. Коула, Д. Мак-Нейла, Дж. Трассела для приближения плотности возрастных коэффициентов первых браков (см. гл. 4.1).

Если параметр A_1 мал по сравнению с A_2 , то влияние первого члена суммы (12) проявляется только в младших возрастных группах, а при $a > a_l$ плотность описывается кривой КМНТ. Отношение $\sigma_2 = \lambda_2/\alpha_2$ характеризует асимметрию главного максимума. С увеличением этого отношения возрастная дисперсия увеличивается, а средний возраст максимальной ми-

грации a_h смещается к старшим группам. Оценка $a_h = \mu_2 + \frac{1}{\lambda_2} \ln \sigma_2$ равна моде кривой КМНТ.

Представление о величинах параметров дает табл. 9. Оценки получены регрессионно по данным о миграциях населения СССР в 1974 г., собранным С. В. Соболевой [1980]. Данные в основном относятся к городскому населению. Регрессионная оценка параметров кривой (12) возможна только нелинейным методом наименьших квадратов (МНК). Учитывая большое число параметров, лучше, если она будет опираться на дезагрегированный по одногодичным группам вектор коэффициентов. Для интерполяции мы предполагали линейное усреднение:

$${}_h M_{ij}(a) \cdot h = \sum_{\xi=a}^{a+h-1} M_{ij}(\xi).$$

Применялись кубические сплайны с условием Форсайта на левой границе и условием нулю второй производной — на правой. В работе А. Роджерса и Л. Кастро [1981, с. 14—15] обсуждается чувствительность параметров к процедуре сплайн-интерполяции данных.

Так же, как и в случае распределения смертности, возникает задача описать движение возрастных коэффициентов миграции при изменениях агрегированных управляющих переменных. Решение этой задачи позволило бы оценить вектор коэффициентов по неполным данным и формализовать прогнозные сценарии. Сейчас трудно предложить экспериментально обоснованное решение.

Возможные подходы (как и в случае смертности) включаются в одно из следующих направлений.

Не прибегая к аналитической форме кривой, в памяти ЭВМ можно хранить набор плотностей возрастных коэффициентов, отвечающий различным функциональным составляющим миграции, т. е. распределению потоков в зависимости от целей

Таблица 9
Параметры кривой Роджерса — Кастро
для некоторых потоков миграции

Параметры	Поток город — село	Поток село — город	Усредненные по всем потокам	
			среднее значение	стандартное отклонение
GMR	0.74	3.41	0.665	1.009
A_1	0.005	0.002	0.005	0.003
α_1	0.313	0.431	0.302	0.102
A_2	0.127	0.187	0.126	0.033
μ_2	19.26	21.10	19.14	1.68
λ_2	0.286	0.270	0.310	0.061
α_2	0.177	0.237	0.176	0.056
A_0	0.005	0.004	0.004	0.001
σ_3	1.61	1.14	2.09	1.14
a_t	11.09	11.38	11.23	0.51
a_h	20.94	21.59	20.82	0.54

Источник: Rogers A., Castro L, Model migration schedules. Laxenburg, 1981, p. 34, 66.

миграции. Выбор комбинации плотностей определяется сценарием, масштаб — суммарным коэффициентом миграции.

Если параметры кривой (12) оценены, управление вместе с масштабирующей переменной GMR может включать любой набор параметров кривой. По аналогии с моделью возрастных коэффициентов брачности предположим

$$M(a)/GMR = A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 a) + A_2 \frac{1}{k} \bar{M}\left(\frac{a-a_0}{k}\right),$$

где $\bar{M}(a)$ — кривая КМНТ со стандартными параметрами, а a_0 и k — управляющие переменные. Их значения можно оценить по первым двум моментам фактической плотности коэффициентов миграции. Построена также система линейных регрессионных уравнений, связывающих параметры кривой со значениями координат a_l и a_h , которые могут быть измерены непосредственно [Роджерс и Кастро, 1981, с. 37].

Малые изменения возрастных коэффициентов можно описать с помощью линейного преобразования логитов, построенных по плотности $M(a)/GMR$, без перехода к числам доживающих. Если оба набора коэффициентов нормированы, то параметры связаны приближенным равенством $A \approx 2(B - 1)$. Однако этот метод приводит к ощутимым ошибкам [Роджерс и Кастро, 1981, с. 40—43].

Глава 4

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОЖДАЕМОСТИ

Согласование трендовой модели рождаемости с моделью движения возрастного состава населения предполагает решение двух задач. Во-первых, необходимо описать преобразование распределения по числу детей в возрастную плотность рождаемости когорты и преобразование желаемого распределения в фактическое. Во-вторых, по возрастным коэффициентам рождаемости когорт построить коэффициенты рождаемости условного поколения и текущие значения первой строчки матрицы Лесли. Если считать, что формирование возрастной плотности рождаемости когорты зависит только от переменных, связанных с реальным поколением, то решение первой задачи становится сравнительно простым, а вторая задача — чисто технической. Предлагаемые здесь модели относятся к этому случаю. С более общей точки зрения можно считать, что такие модели конструируют лишь потенциальные коэффициенты рождаемости когорт, искажения которых — следствия факторов условно-

го поколения (например, изменения сравнительной численности возрастных групп). Эти эффекты должны быть описаны специальными моделями.

1. БРАЧНОСТЬ И ВОЗРАСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РОЖДАЕМОСТИ

Возрастные коэффициенты рождаемости условного поколения $f(t, a)$, отнесенные к началу календарного года t и возрастному интервалу $[a, a+h]$ лет, определяются аналогично наблюдаемым коэффициентам смертности (см. гл. 3.2). При интерполяции можно предположить линейное усреднение $f(a) \cdot h =$

$= \sum_{\xi=a}^{a+h-1} f(\xi)$. Мы использовали интерполяцию сплайнами пятой степени с дополнительным псевдоузлом, определенным равенством $f(15) = 0.2 \cdot f(15)$, которое получается исходя из приближения квадратной параболой на интервале [15, 19] лет. В статье Д. Мак-Нейла и др. [1980] приведены обратные матрицы для нахождения коэффициентов разложения сплайна по базису усеченных степенных функций.

Пусть $\Phi(a, t)$ — квадратная матрица возрастных коэффициентов рождаемости когорт в зависимости от возраста $a \in [0, \beta]$ и года рождения когорты $t \in [t-\beta-1, t-1]$. Одногодичные коэффициенты рождаемости условного поколения представляют собой диагональ этой матрицы $f(t, a) = \Phi(a, t-a-1)$. Шаг экстраполяционной модели по времени включает преобразование матрицы Φ — сдвиг ее столбцов в соответствии с правилом очереди и выбор диагонали. Таким образом, наблюдаемый суммарный коэффициент рождаемости условного поколения $TFR(t) = \sum_{(a)} f(t, a)$ отражает различные фазы трендового процесса и различные значения трендовых управляющих переменных (например, параметров брачности). Если число рожденных детей уменьшается от поколения к поколению, суммарный коэффициент лишь отслеживает эту тенденцию, демонстрируя большую инерцию. В статье Р. Д. Ли [1980] эта зависимость формализуется при простой гипотезе о возрастном распределении рождаемости когорты.

Если когорта представляет собой демографически однородное население, можно ожидать, что возрастная плотность рождаемости опишется унимодальной кривой с правой асимметрией. Различия когорт при неизменной брачности в большей степени затрагивают коэффициенты старших возрастных групп, чем коэффициенты младших, на которые приходятся рождения первых детей. Это подтверждается прямым статистическим моделированием репродуктивного процесса (см. ниже) и предполагается во всех аналитических моделях. Сокращение рождаемости, таким образом, может вызвать интересную деформацию

коэффициентов условного поколения. Возрастная дисперсия становится существенно большей, чем в реальном поколении с такой же средней рождаемостью, и унимодальность возрастного распределения может нарушиться. В динамической модели, включающей трендовую конструкцию, отмеченный эффект наблюдается в течение одного-двух поколений после начала сокращения рождаемости в когортах. На рис. 6 [Баркалов и

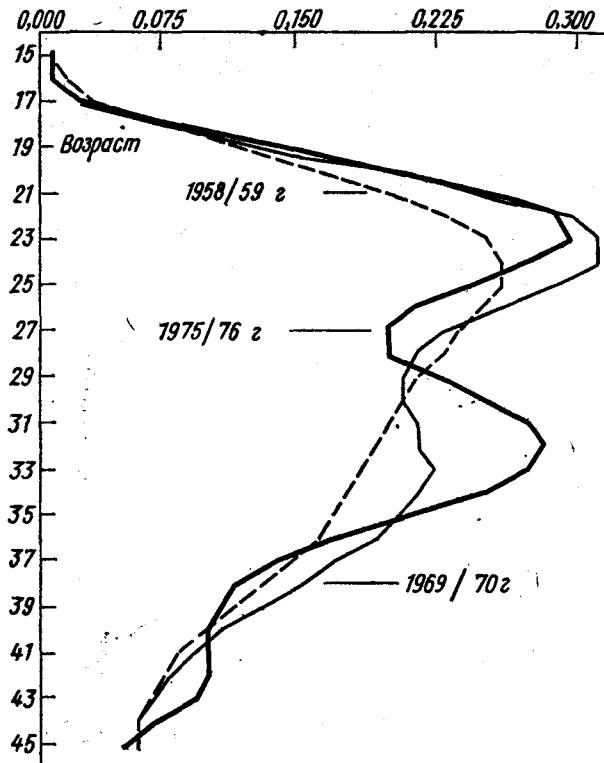


Рис. 6. Динамика возрастных коэффициентов рождаемости населения Киргизской ССР

Ким, 1982, с. 122] изображено фактическое изменение рождаемости условного поколения Киргизской ССР. Помимо очевидной зависимости от неоднородности национального состава, немонотонность $f(a)$ в старших группах может быть объяснена наложением медленных процессов изменения рождаемости в когортах.

Экстраполяционная конструкция становится сравнительно простой, если предположить, что формирование возрастных коэффициентов рождаемости когорт происходит только под действием трендовых переменных и переменных, которые являются экзогенными по отношению к демографической модели. Проблема сводится к построению матрицы преобразований, связывающей желаемое и фактическое распределение по числу детей в каждой когорте $z(\tau) = \zeta(\tau) Q(\tau)$ (см. гл. 1.2), и построе-

нию по этим распределениям возрастной плотности $\phi(t)$ для каждой из когорт. Матрица Q может зависеть также от экзогенных переменных, связанных с текущим моментом времени (изменения в течение жизни когорты характеристик демографической политики, уровней смертности, параметров контрацепции). Микроимитационная (статистическая) модель, описанная ниже, согласованно решает обе задачи, но ее реализация на каждом шаге по времени требует больших ресурсов ЭВМ.

Более простые аналитические конструкции связывают исходное распределение $\phi(a, t)$ со средним числом рождений $\bar{z}(t)$ и управляющими переменными. Экстраполяционная модель не обязательно предполагает включение трендового механизма: Любые прогнозные гипотезы о будущей рождаемости логично формализовать в терминах столбцов матрицы ϕ . Матрицу можно построить предварительно, с помощью микроимитационной модели или другим способом. Экстраполяция в этом случае не потребует никаких дополнительных гипотез в отношении рождаемости.

Предложен ряд аналитических кривых, аппроксимирующих возрастные коэффициенты рождаемости реального поколения [Кейфиц и Смит, 1977; Митра и Романюк, 1980]. Используются кривые Пирсона: гамма-распределение и бета-распределение. Параметры легко рассчитываются по первым двум моментам возрастной плотности, возможны и оценки нелинейным МНК. Интересно, что качество приближения рождаемости условных поколений бета-распределением почти не зависит от фактора масштаба TFR , допускает широкие колебания среднего возраста, но болезненно реагирует на слишком большую возрастную дисперсию. К сожалению, нет оснований предположить, что существенное отклонение возрастной плотности рождаемости условного поколения от найденной аналитической аппроксимации — свидетельство неоднородности рождаемости по поколениям или по другим демографическим группам.

С именем Э. Коула, Д. Мак-Нейла и Дж. Трассела связаны опубликованные в 70-е годы модели разложения возрастных коэффициентов рождаемости когорты на составляющие [Коул и Трассел, 1974; Коул, 1977]. Предполагается равенство

$$\phi(a) = H_c G(a) \varphi n(a) \exp(-hv(a)), \quad (1)$$

имеющее два параметра: H_c и h . Здесь функция $\varphi n(a)$ определяет максимум рождаемости в браке, достигаемый при отсутствии контрацепции. Ее изменение с возрастом соответствует уменьшению биологической способности к зачатию и вынашиванию ребенка. Функция Л. Анри $v(a)$ — эталонная функция уменьшения естественной рождаемости в связи с применением контроля. Параметр h отражает уровень контроля. Характер логарифмических отклонений $\frac{1}{v(a)} \ln \left[\frac{\phi(a)}{H_c G(a) \varphi n(a)} \right] + h$ дает

возможность судить о типе возрастного распределения рождаемости по аналогии с классификацией типов смертности в таблицах Коула — Демени. Эталонные функции φ и v табулированы (табл. 10). В работе Э. Коула и Дж. Трассела [1974, с. 202] приведены их значения с шагом 1 год.

Таблица 10

Средние по пятилетним интервалам значения эталонных функций в разложении (1)

Возраст	15—19	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44	45—49
$\varphi_n(a)$	0.411	0.460	0.431	0.396	0.321	0.167	0.024
$v_n(a)$	0.000	0.067	0.316	0.814	1.048	1.424	1.667

Источник: Coale A. J., Trussel J. Model fertility tables: variation in the age structure of childbearing in human populations. — Population Index, 1974, vol. 49, p. 202.

Функция $G(a)$ в разложении (1) — доля женщин когорты, когда-либо состоявших в браке. Хотя брачные союзы распадаются и создаются вновь, именно функция $G(a)$, а не пропорция фактически состоявших в браке в данном возрасте отражает возможное распределение рождений по возрастам. Рождаемость вне брака распределена по возрасту пропорционально брачной рождаемости. Очевидно, $g(a) = G'(a)$ — вероятность вступления в первый брак. Эта функция имеет один максимум и характерное правостороннее смещение. Она похожа на кривые, изображенные на рис. 5, но тождественно равна нулю в младших группах. Данные табл. 11 относятся к состоянию текущего брака, что примерно соответствует $G(a)$ до достижения максимума производной. Параметры брачности логично отнести к экзогенным переменным, меняющимся от поколения к поколению. Они могут считаться управляющими переменными модели.

Для сглаживания $g(a)$ используется двойная экспоненциальная функция Коула—Мак-Нейла—Трассела (КМНТ), представляющая собой обобщение кривой Гомперца. Стандартная плотность КМНТ имеет вид

$$\bar{g}(x) = \exp[-\alpha x - e^{-\lambda x}] \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha/\lambda)}.$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, играющая роль нормировочного множителя: $\sum_{(x)} \bar{g}(x) = 1$. Стандартное среднее и дисперсия КМНТ выражаются равенствами:

$$\mu = \frac{-d \ln \Gamma(\alpha/\lambda)}{\lambda d(\alpha/\lambda)}, \quad \sigma^2 = \frac{d^2 \ln \Gamma(\alpha/\lambda)}{\lambda^2 d(\alpha/\lambda)^2}.$$

Таблица 1*

Показатели брачного состояния при различных типах брачности
(доля не состоящих в браке в % к численности данной возрастной группы)

Примеры	Мужчины			Женщины		
	20—24	25—29	45—49	20—24	25—29	45—49
СССР, 1926 г.	51	18	3	28	9	4
СССР, 1939 г.	66,4	26,2	6,5	38,6	21,6	
СССР, 1959 г.	72,6	20,0	3,7	49,9	24,1	
СССР, 1970 г.	71,1	22,8	4,8	44,1	17,3	
СССР, 1979 г.	61,6	21,5		39,8	19,4	
Эстонская ССР, 1970 г.	75,6	33,0	12,6	51,1	25,2	
Таджикская ССР, 1970 г.	70,0	21,3	4,1	23,6	8,8	
Индия, 1931 г., традиционный тип брачности	35	14	4	5	2	1
Болгария, 1900 г., восточно-европейский тип брачности	58	23	3	24	3	1
Франция, 1900 г.	90	48	11	58	30	12
Швеция, 1900 г., европейский тип брачности	85	50	16	71	41	17
Франция, 1972 г.	73,0	31,1*		50,7	17,3*	
Швеция, 1975 г.	91,3	46,6*		76,3	32,3*	

* В среднем 25—34 года.

Источники: Хаджинал Дж. Европейский тип брачности в перспективе. — В кн.: Брачность, рождаемость, семья за три века. М., 1979, с. 15, 17, 20; Народонаселение стран мира. М., 1978, с. 149, 151, 155, 157; Население СССР. М., 1983, с. 89.

Мы пользовались стандартными константами КМНТ: $a=0.174$, $\lambda=0.288$, $\mu=6.186$, $\sigma=6.585$, при этом $\lambda/\Gamma(a/\lambda)=0.1946$ (сравните данные табл. 9).

Доля когда-либо состоявших в браке находится как интеграл

$$G(a) = G_0 \int_{a_0}^a \frac{1}{k} g\left(\frac{x-a_0}{k} - \mu\right) dx. \quad (2)$$

Здесь G_0 — константа, равная предельной доле когда-либо состоявших в браке (для удобства она включается как множитель в параметр масштаба H_c), a_0 — начальный возраст, определяемый равенством $a_0=\hat{a}-2k\mu$, где \hat{a} — наблюдаемый средний возраст заключения первого брака. Параметр шкалы k связывает эмпирическую дисперсию со стандартной: $\hat{\sigma}=k\sigma$. Таким образом, $1/k$ измеряет возрастную скорость распространения первых браков. Стандарт $k=1$ описывает брачность населения Швеции в XIX в. (европейский тип).

Параметры функции (2) могут быть рассчитаны по вычисленным первым двум моментам фактического распределения возрастной плотности первых браков. Представление об их ве-

личинах дает табл. 12. По расчетам И. П. Ильиной [1976, с. 131], для когорты женщин РСФСР рождения 1913—1917 гг. параметры равны $a_0=15$ и $k=0.654$. А. Г. Волков в качестве эталонного медианного возраста невест принимает 22 года [1979, с. 63—64].

Таблица 12

Параметры возрастного распределения вероятности вступления в первый брак

Примеры	Параметры			
	\hat{a}	$\hat{\sigma}$	k	a_0
Когорта женщин 1913—1917 гг. рождения из семей рабочих и служащих СССР	24.009	5.5973	0.8500	13.49
Условные поколения женщин: СССР, 1972 г.	22.480	4.8653	0.7388	13.71
Ирландия, 1974 г. (европейская брачность)	24.957	5.1594	0.7835	15.26
Болгария, 1975 г.	21.257	3.4881	0.5297	14.70

Рассчитано по: Ильина Н. П. Изучение брачности поколений женщин из семей рабочих и служащих СССР.—В кн.: Рождаемость. М., 1976, с. 138; Народонаселение стран мира. М., 1974, с. 114. Народное хозяйство СССР в 1972 г. М., 1973, с. 34; United Nations demographic yearbook N. Y. 1976, p. 212; 1977, p. 188, 530, 531.

Оценивание параметров h и H_c уравнения (1) можно провести методом наименьших квадратов. Параметры можно рассчитать также по двум моментам: среднему $\bar{z}(\tau)$ и среднему возрасту рождаемости. Последняя величина оказывается монотонной функцией h , поэтому соответствующее уравнение легко решается. В трендовой модели нормирующий множитель H_c фиксируется. Таким образом, возрастная плотность рождаемости восстанавливается с помощью (1) по коэффициенту суммарной рождаемости и управляющим переменным брачности.

Пусть известны параметры брачности когорт, формирующих рождаемость данного условного поколения. Тогда, очевидно,

$$\ln \frac{f(t, a)}{G(a, t-a-1) \varphi n(a)} = \ln H_c - v(a) h(t-a-1). \quad (4)$$

Второй аргумент функции $G(a, \tau)$ отражает зависимость брачности от года рождения когорты. Если уравнение движения $h(\tau)$ сравнительно простое, его параметры можно попытаться восстановить оцениванием (4) линейным МНК при фиксированном t или на основе данных, относящихся к различным календарным годам.

Пусть зависимость $h(\tau)$ линейная: $h(\tau) = h_0 + \delta\tau$, а параметры брачности не меняются. Тогда при переходе к условному поколению следующего календарного года возрастные коэффициенты рождаемости изменятся в соответствии с равенством

$$f(t+1, a) = f(t, a) \exp(-\delta v(a)) \approx f(t, a)(1 - \delta v(a)).$$

Отсюда получается формула коррекции коэффициентов рождаемости условного поколения:

$$\frac{f(a) - \bar{f}(a)}{TFR - \bar{TFR}} = \frac{\bar{f}(a)v(a)}{\sum_{(a)} \bar{f}(a)v(a)}. \quad (5)$$

Здесь $\bar{f}(a)$ и $\bar{TFR} = \sum_a \bar{f}(a)$ и представляют наблюдаемые коэффициенты рождаемости, а $f(a)$ и $TFR = \sum_{(a)} f(a)$ — сценарные коэффициенты рождаемости. Уравнение (5) может корректировать возрастные коэффициенты на каждом шаге модели согласно изменению агрегированной управляющей переменной $TFR(t)$. Коэффициенты $\bar{f}(a)$ могут представлять также какое-либо типовое распределение рождаемости, а коррекция (5) — использоваться при отладке модели.

Если возрастные коэффициенты рождаемости условного поколения известны, легко рассчитать элементы первой строчки матрицы Лесли. Общее число родившихся приближается линейным равенством

$$B(t) = \frac{1}{4} \sum_{a=0}^8 (P(t, a)f(a) + P(t+1, a+1)\bar{f}(a+1)).$$

Отсюда

$$F(a) = \frac{L(0)}{4} \left(f(a) + f(a+1) \frac{L(a+1)}{L(a)} \right). \quad (6)$$

Равенство предполагает тождественность возрастного состава мужского и женского населения. Более точное приближение для пятилетних возрастных групп приведено в статье Е. М. Андреева и С. И. Пирожкова [1975].

Используя равенства (5) и (6), можно решить обратную задачу: определить, какой должна быть суммарная рождаемость TFR , чтобы при данных возрастных коэффициентах $\bar{f}(a)$ и $L(a)$ число родившихся в первый вычисляемый год совпало с некоторым заданным. Возрастные коэффициенты рождаемости условного поколения могут быть найдены из косвенных соображений (например, по коэффициентам рождаемости когорт). Поэтому в начальные годы экстраполяции в динамике $B(t)$ и $P(t, 0)$ может возникнуть заметный разрыв, говорящий о неточном выборе значений управляющих переменных. Кор-

рекция рождаемости условного поколения по найденному суммарному коэффициенту — простейшая модель искажения когортной рождаемости.

2. МИКРОИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РОЖДАЕМОСТИ

Предлагаемая здесь модель является упрощенным аналогом модели С. Иноуэ [1980]. Входные переменные включают распределение женщин по желаемому числу детей и переменные управления. Последние разделяются на быстрые, изменения которых в течение жизни когорты должны быть заданы явными функциями времени, и медленные — неизменные для каждой когорты. С помощью метода статистических испытаний (Монте-Карло) модель генерирует распределение по фактическому числу рождений и возрастные коэффициенты рождаемости. Репродуктивный период жизни каждого представителя когорты моделируется независимо от других. Строки матрицы преобразований $Q(\tau)$ могут быть построены моделью по входным распределениям $\zeta(\tau)$, сконцентрированным на фиксированных координатах. Соотношения брачности и фундаментальные параметры взяты из аналитической конструкции Коула—Трассела (1). Приближение имитированных характеристик к распределениям, построенным по равенству (1), считается тестом пригодности модели.

Модель представляет собой марковскую цепь с 11 состояниями (рис. 7). Шаг равен одному кварталу (четверти года). Вероятности перехода могут изменяться в зависимости от возраста и управляющих переменных.

Начало эффективного брака определяется вероятностью перехода:

$$p_{12} = \frac{0.25 g(a)}{1 - \sum_{\xi < a} g(\xi)}.$$

Здесь $g(a)$ — нормированная возрастная плотность первого брака. Коэффициент G_0 моделью не учитывается, поэтому результаты характеризуют только тех представителей когорты, которые когда-либо были замужем. Функция $g(a)$ вычислена с шагом один год. Два параметра функции брачности являются медленными управляющими переменными модели.

Вероятность зачатия при отсутствии временной или постоянной стерильности определяется максимальной вероятностью зачатия $f_c(a)$ и параметрами неэффективности контрацепции. Если число прошлых рождений строго меньше желаемого числа детей, но рождение в данный момент преждевременно, то $p_{23} = \bar{c}_1 f_c(a)$. Преждевременность рождения определяется сравнением времени, прошедшего после первого брака, с желаемым протогенетическим интервалом (если рождение первое) или сравнением времени, прошедшего после предыдущего

рождения, с желаемым интергенетическим интервалом (если рождение не первое). Названные два параметра являются медленными управляющими переменными модели. Если фактическое число прошлых рождений превышает или равно желаемому числу детей, то $p_{23} = \min [\bar{c}_1, \bar{c}_2] f_c(a)$. Уровни неэффективности контрацепции \bar{c}_1 и \bar{c}_2 считаются быстрыми управляющими

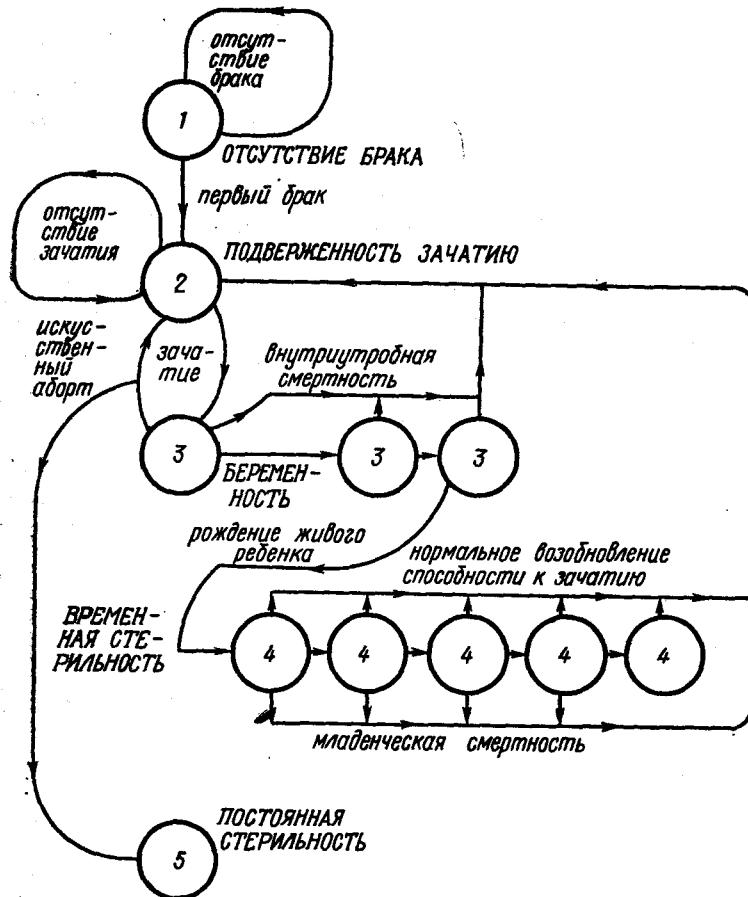


Рис. 7. Схема микромитационной модели

переменными. Их значения могут быть связаны с характеристиками распространенной практики контрацепции [Иноуз, 1980, с. 178]. Когда возможное зачатие не попадает ни под одно из отмеченных ограничений, оно считается желаемым и его вероятность совпадает с $f_c(a)$.

Зависимость между вероятностью зачатия и наблюдаемыми коэффициентами рождаемости иллюстрируется разностным процессом Базу—Дандекара [Базу, 1955], который является

простым случаем ряда общих моделей [Кейфиц и Смит, 1977]. Пусть величина $b(t)$ принимает значение 1, если в момент t произошло зачатие, и значение 0 в противном случае. Пусть σ — постоянная вероятность зачатия в отсутствие временной стерильности. Период временной стерильности имеет длину $m - 1$. Тогда легко получить разностное уравнение

$$b(t) = (1 - \sigma)b(t - 1) + \sigma b(t - m). \quad (7)$$

Его начальные условия можно считать заданными: $b(t) = 0$ при $t \in [-m, -2]$ и $b(-1) = \sigma$. Таким образом, на интервале $[0, m - 2]$ величина $b(t)$ подчиняется биномиальному закону.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^m - (1 - \sigma)\lambda^{m-1} - \sigma = 0$$

оказывается частным случаем уравнения Лотки (см. гл. 2.1). Поскольку сумма элементов ядра равна 1, главный корень $\lambda_1 = 1$. Этот корень простой. Все прочие корни подчиняются неравенству $|\lambda_j| < 1$. Таким образом, решение уравнения (7) имеет вид

$$b(t) = \frac{\sigma}{1 + (m - 1)\sigma} + \sum_{j=2}^m Q_j \lambda_j^t. \quad (8)$$

Наблюдаемая плотность зачатий в однородном населении представляет собой усреднение многих процессов (8), отличающихся сдвигом начальных условий по времени, но имеющих одинаковые параметры. Таким образом, усреднение по времени

$$\bar{b}(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T b(t - \tau) d\tau \approx \frac{\sigma}{1 + (m - 1)\sigma} \quad (9)$$

аппроксимирует наблюдаемую плотность. Эту формулу можно понимать просто как коррекцию независимой вероятности σ в связи со средней длительностью интервала между зачатиями [Бонгаартс, 1976]. В нашем случае $\bar{b}(a) = 0.25(\varphi n(a+1)0.75 + \varphi n(a)0.25)$, а формула (9) понимается как приближение для меняющейся вероятности $\sigma = f_c(a)$. Значение $m - 1 = 7.5$ (квартала) найдено при отладке модели.

Вероятность искусственного абортов определяется аналогично вероятности применения контрацепции. Нижний уровень допустимости абортов соответствует преждевременному зачатию, верхний — превышению желаемого числа детей. Обе эти переменные считаются быстрыми управляющими переменными модели. Вероятность наступления постоянной стерильности вследствие искусственного абORTA зависит от общих характеристик здоровья когорты и считается медленной управляющей переменной. Другая возможность наступления постоянной стерильности предусматривается лишь с достижением предельного возраста.

Внутриутробная смертность зависит от возраста матери в момент зачатия. Несколько скорректированная оценка Френча и Бирмана [Иноуэ, 1980, с. 176] в наилучшей степени согласуется с аналитическим приближением возрастной плотности рождаемости. Младенческая смертность связывается со среднегодовым уровнем *IMR* (быстрой управляющей переменной) и распределением смертности по первым месяцам жизни (модель № 2 С. Иноуэ [1980, с. 177]). Нормальная продолжительность периода временной стерильности (аменореи) строится по вероятности, табулированной Н. Крафтсом и Н. Айрлендом [1980, с. 98].

Описанные вероятности перехода полностью определяют динамику модели. Статистические испытания проводились с помощью датчика равномерно распределенных случайных чисел Дж. Форсайта и др. [1980, с. 266]. Скорость сходимости в зависимости от числа итераций (объема имитируемой выборки) иллюстрируется табл. 13. Выборка из 1000 представителей когорты включает 140×1000 возможных переходов от состояния к состоянию. Чистое время использования процессора ЭВМ «Норд-100» в этом случае — около 5 мин.

Таблицы 14—16 содержат примеры расчетов по модели. Исходные распределения по желаемому числу детей и значения управляющих переменных соответствуют традиционной высокой рождаемости (распределения «A» и «D») или современной низкой рождаемости (распределения «B» и «C»). В первом случае желаемое распределение по числу детей сконцентрировано на максимальной координате, во втором — совпадает с распределением городского русского населения по ожидаемому числу детей (см. табл. 4, гл. 1). Приняты два варианта возрастного распределения брачности: смещенное к молодым группам (распределения «A» и «B») и смещенное к старшим группам (распределения «C» и «D»). Параметры молодого распределения брачности являются, по-видимому, крайними из возможных, параметры старого распределения отражают ослабленный вариант европейской брачности. Зависимость традиционной рождаемости от брачности весьма существенна.

Отклонение фактического распределения по числу детей от желаемого измеряется двумя показателями. Это — положительная разница между плотностями: $DIM = \sum_k [z_k - \zeta_k]_+$ и относительный уровень неудачи:

$$UH = \frac{1}{\zeta N} \sum_{n=1}^N |A(n) - k(n)|.$$

Здесь $A(n)$ — фактическое число рождений у n -го представителя имитируемой выборки, вычисляемого моделью, а $k(n)$ — заданное желаемое число детей. Общий объем выборки равен N .

Таблица 13

Сходимость микромитационной модели

Число итераций	Распределение «A»		Распределение «B»	
	1	2	1	2
100	8.750 (2.046)	0.3980	1.869 (0.787)	0.1720
500	8.830 (2.049)	0.4160	1.868 (0.859)	0.1832
1 000	8.820 (2.163)	0.4228	1.889 (0.864)	0.1856
5 000	8.798 (2.099)	0.4178	1.880 (0.853)	0.1806
10 000	8.800 (2.094)	0.4163	1.888 (0.858)	0.1829

Примечание. 1 — среднее имитированное число детей (в скобках — стандартное отклонение); 2 — возрастной коэффициент рождаемости для группы 20—24 года.

Таблица 14

Характеристики четырех имитированных распределений рождаемости по возрастам (в скобках — стандартные отклонения)

	Распределения			
	«A»	«B»	«C»	«D»
Средний возраст первого брака a_0	20.00	20.00	25.00	25.00
Параметр возрастной шкалы k	0.50	0.50	0.93	0.93
Протогенетический интервал (кварталы)	0.00	0.00	0.00	0.00
Интергенетический интервал (кварталы)	0.00	8.00	8.00	0.00
Неэффективность контрацепции (1) c_1	1.00	0.25	0.25	1.00
Неэффективность контрацепции (2) c_2	1.00	0.05	0.05	1.00
Нижний уровень допустимости абортов	0.00	0.50	0.50	0.00
Верхний уровень допустимости абортов	0.00	0.95	0.95	0.00
Коэффициент младенческой смертности (промилле) IMR	100.00	20.00	20.00	100.00
Уровень стерильности после abortion	0.00	0.05	0.05	0.00
Среднее желаемое число детей ζ	15.00 (0.00)	1.85 (0.84)	1.85 (0.84)	15.00 (0.00)
Среднее имитированное число детей \bar{z}	8.80 (2.10)	1.88 (0.85)	1.80 (0.88)	6.68 (2.88)
Средний возраст рождаемости	29.27 (6.87)	22.62 (4.10)	26.49 (5.70)	30.95 (6.58)
Отклонение от желаемого (D/M) (UH)	0.999 0.414	0.022 0.037	0.034 0.067	0.999 0.555
Аналитическая аппроксимация				
Коэффициент замедления h	0.239	4.692	2.198	0.175
Нормирующий множитель H_c	1.050	0.653	0.675	1.000

Таблица 15

**Имитированные распределения по фактическому
числу детей**

Число детей	Название распределений			
	«A»	«B»	«C»	«D»
0	0.0002	0.0290	0.0526	0.0284
1	0.0010	0.2766	0.2906	0.0292
2	0.0038	0.5290	0.5106	0.0350
3	0.0080	0.1304	0.1152	0.0552
4	0.0182	0.0240	0.0202	0.0746
5	0.0368	0.0078	0.0080	0.0988
6	0.0692	0.0030	0.0026	0.1210
7	0.1098	0.0002	0.0002	0.1326
8	0.1616	0.0000	0.0000	0.1382
9	0.2002	0.0000	0.0000	0.1238
10	0.1824	0.0000	0.0000	0.0872
11	0.1266	0.0000	0.0000	0.0488
12	0.0592	0.0000	0.0000	0.0200
13	0.0190	0.0000	0.0000	0.0056
14	0.0040	0.0000	0.0000	0.0016

Таблица 16

Изменение имитированных характеристик при изменении параметров демографического поведения

Гипотезы	Распределение «B»		Распределение «C»	
	1	2	1	2
Базовые параметры	1.88 (0.85)	0.037	1.80 (0.88)	0.067
Ограничение абортов	2.35 (1.02)	0.276	2.07 (1.01)	0.220
Увеличение желаемого интергенетического интервала	1.79 (0.77)	0.074	1.62 (0.77)	0.152
Увеличение желаемого протогенетического интервала	1.73 (0.93)	0.101	1.53 (0.97)	0.199

Примечание: 1 — среднее имитированное число детей (в скобках — стандартное отклонение); 2 — отклонение фактического числа детей от желаемого UH .

Таким образом, UH измеряет неудачу в реализации желаемого числа детей. Наибольший уровень UH в традиционном населении с европейской брачностью: более половины желаемых рождений не реализуется.

В табл. 16 и на рис. 8 представлены результаты управляющих воздействий на репродуктивный процесс, имитируемый моделью. Распределение по желаемому числу детей, отражающее установку на малую рождаемость, не меняется, но путь достижения этой цели корректируется. Первая гипотеза запрещает искусственный аборт в том случае, когда желаемое число де-

тей не достигнуто, хотя зачатие и преждевременно. Практически речь идет о первых абортах. В рамках этой же гипотезы уменьшается и верхний уровень допустимости абортов. Результат ощутим, но показатель неудачи UH становится значительным, особенно при молодом распределении брачности, несмотря на то что этот показатель не учитывает преждевре-

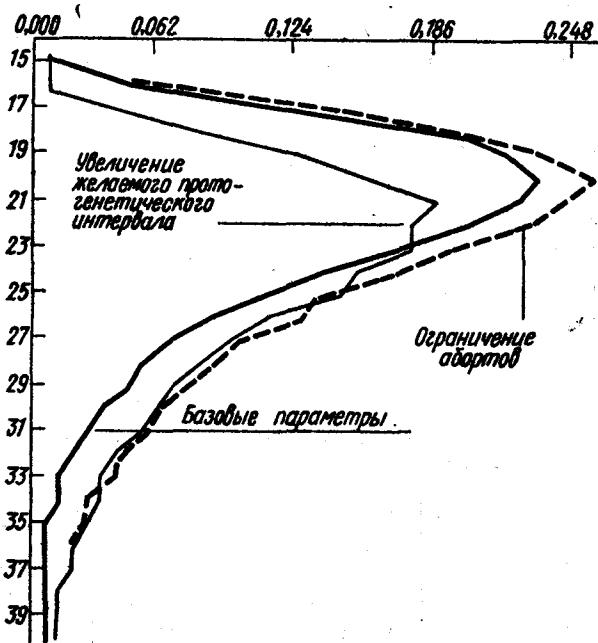


Рис. 8. Изменение возрастных коэффициентов рождаемости при различных гипотезах

менность рождения как неудачу. Другие гипотезы предполагают сознательные изменения в планировании числа детей. Необходимость отложить желаемое рождение на длительный срок (в модели крайний случай — на 10 лет после заключения брака) может вызываться разными экономическими или демографическими причинами, в частности нарушением экономической зависимости семей детей и родителей или взаимодействием различных когорт. Желание отложить рождение подкрепляется уменьшением параметров неэффективности контрацепции до $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0.05$. Результаты демонстрируют существенное уменьшение рождаемости, но меньшее, чем в первом случае, возрастание UH . Изменение возрастной плотности (см. рис. 8) похоже на описываемое аналитической моделью.

Литература

- Материалы XXV съезда КПСС.** — М.: Политиздат, 1976.
- Материалы XXVI съезда КПСС.** — М.: Политиздат, 1981.
- Андреев Е. М.** Продолжительность жизни в СССР: дифференциальный анализ. — В кн.: Продолжительность жизни: анализ и моделирование. — М.: Статистика, 1979.
- Андреев Е. М., Доброловская В. М.** Об одном методе изучения кривых дожития. — В кн.: Продолжительность жизни: анализ и моделирование. — М.: Статистика, 1979.
- Андреев Е. М., Пирожков С. И.** О потенциале демографического роста. — В кн.: Население и окружающая среда. — М.: Статистика, 1975.
- Базу. Вази D. A Note on the structure of stochastic model considerated by V. M. Dandekar.** — Sankhya, 1955, vol. 15, p. 250—252.
- Баркалов Н. Б.** О математических моделях долгосрочного прогнозирования населения. — В кн.: Наше будущее глазами демографа. — М.: Статистика, 1979.
- Баркалов Н. Б., Катус К. А.** Об одной нелинейной демографической модели. — В кн.: Проблемы развития региона. — Фрунзе: Изд-во Киргизского ун-та, 1982.
- Баркалов Н. Б., Ким В. Л.** Вопросы использования матричной модели «Если в прогнозировании населения Киргизской ССР». — В кн.: Проблемы развития региона. — Фрунзе: Изд-во Киргизского ун-та, 1982.
- Басалаева Н. А.** Моделирование демографических процессов и трудовых ресурсов. — М.: Наука, 1978.
- Белова В. А.** Число детей в семье. — М.: Статистика, 1975.
- Белова В. А., Бондарская Г. А., Вишневский А. Г., Дарский Л. Е., Сифман Р. И.** Сколько детей будет в советской семье. — М.: Статистика, 1977.
- Бонгаартс. Вонгаартс J.** Intermediate fertility variables and marital fertility rates. — Population Studies, 1976, vol. 39, N 2.
- Бондарская Г. А., Ильина И. П.** Этническая дифференциация брачности женщин в СССР. — В кн.: Демографическое развитие семьи. — М.: Статистика, 1979.
- Борисов В. А.** Перспективы рождаемости. — М.: Статистика, 1976.
- Брасс У.** Об одном способе выражения закономерностей смертности. — В кн.: Изучение продолжительности жизни. — М.: Статистика, 1977.
- Будыко М. И.** Глобальная экология. — М.: Мысль, 1977.
- Буржуа — Пиша Ж.** Стабильные полустабильные населения и потенциал роста. — В кн.: Демографические модели. — М.: Статистика, 1977.
- Вишневский А. Г.** Демографическая революция. — М.: Статистика, 1976.
- Вишневский А. Г.** О мотивационной основе рождаемости. — В кн.: Демографическое развитие семьи. — М.: Статистика, 1979.
- Вишневский А. Г.** Воспроизводство населения и общество. М.: Финансы и статистика, 1982.
- Волков А. Г.** О необходимости воздействия на рождаемость. — В кн.:

- Рождаемость. — М.: Статистика, 1976.
- Волков А. Г. Об ожидаемой продолжительности брака и ее демографических факторах. — В кн.: Демографическое развитие семьи. — М.: Статистика, 1979.
- Волков А. Г. Семья как фактор изменения демографической ситуации. — Социологические исследования, 1981, № 1.
- Ворошук А. Н. Математическое моделирование систем в демографии. — В кн.: Математические методы в социологическом исследовании. — М.: Наука, 1981.
- Воспроизведение населения СССР. — М.: Финансы и статистика, 1983.
- Гельфоид А. О. Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.
- Гинзбург Л. Р. О динамике и управлении возрастной структурой популяции. — В кн.: Проблемы кибернетики, № 23. — М.: Наука, 1970.
- Горбунов В. К. Системный анализ экономического и демографического роста. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, № 1.
- Горбунов В. К. О моделировании демографических процессов. — В кн.: Проблемы развития региона. — Фрунзе: Изд-во Киргизского ун-та, 1982.
- Гражданников Е. Д. Прогностические модели социально-демографических процессов. — Новосибирск: Наука, 1974.
- Дарский Л. Е. Формирование семьи. — М.: Статистика, 1972.
- Дарский Л. Е. Воспроизведение населения. — В кн.: Марксистско-ленинская теория народонаселения. — М.: Мысль, 1974.
- Дарский Л. Е. Рождаемость и репродуктивная функция семьи. — В кн.: Демографическое развитие семьи. — М.: Статистика, 1979.
- Демографическое развитие Украинской ССР. — Киев: Наукова Думка, 1977.
- Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
- Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике. — М.: Наука, 1979.
- Ильина И. П. Дифференциация брачности в нескольких поколениях женщин в СССР. — В кн.: Демографическая ситуация в СССР. — М.: Статистика, 1976.
- Ильина И. П. Изучение брачности поколений женщин из семей рабочих и служащих в СССР. — В кн.: Рождаемость. — М.: Статистика, 1976.
- Иноуэ С. Выбор мер демографической политики для воздействия на рождаемость. — В кн.: Имитационные модели в демографии. — М.: Статистика, 1980.
- Итоги Всесоюзной переписи населения СССР 1970 года. Том 2. — М.: Статистика, 1972.
- Кардаш А. Ю. К построению имитационной модели дожития реального поколения. — В кн.: Продолжительность жизни: анализ и моделирование. М.: Статистика, 1979.
- Кваша А. Я. Проблемы экономико-демографического развития СССР. — М.: Статистика, 1974.
- Кейфиц Н. Возмещение долга: приложение к проблемам миграции и контроля над рождаемостью. — В кн.: Математика в социологии. — М.: Мир, 1977.
- Кейфиц. Keyfitz N. Applied Mathematical demography. — N. Y., 1977.
- Кейфиц, Флайджер. Keyfitz N., Flieger W. World population: an analysis of vital data. — Chicago, 1968.
- Кейфиц, Флайджер. Keyfitz N., Flieger W. Population: facts and methods of demography. — San-Francisco, 1971.
- Кейфиц, Смит. Keyfitz N., Smith D. Mathematical demography. — Berlin, 1977.
- Конгтон. Congton P. Forecasting birth in greater London: an application of the Easterlin hypothesis. — Population Studies, 1980, vol. 34, N 2.
- Коул. Coale A. J. The growth and structure of human populations. — Princeton, 1972.

- Коул. Coale A. J. The development of new models of nuptiality and fertility. — Population, 1977, special issue, p. 131—154.
- Коул Э. Дж. Снижение рождаемости в Европе со времен французской революции до первой мировой войны. — В кн.: Брачность, рождаемость и семья за три века. — М.: Статистика, 1979.
- Коул, Демени. Coale A. J., Demeny P. Calculation of model life tables. — In: Regional, model life tables and stable populations. — Princeton, 1966.
- Коул, Трассел. Coale A. J., Trussell J. Model fertility tables: variations in the age structure of childbearing in human populations. — Population Index, 1974, vol. 49, N 2.
- Крафтс Н. Ф. Р., Айрленд Н. Дж. Роль методов имитации в разработке теории формирования семьи и ее изучении. — В кн.: Имитационные модели в демографии. — М.: Статистика, 1980.
- Ли Р. Д. Естественная рождаемость, демографические циклы и спектральный анализ рождений и браков. — В кн.: Статистический анализ в демографии. — М.: Статистика, 1980.
- Ли Lee R. D. Aiming at a moving target: period fertility and changing reproductive goals. — Population Studies, 1980, vol. 34, N 2.
- Мак-Нейл Дж. Р., Трассел Т. Дж., Тернер Дж. С. Интерполяция демографических данных с помощью сплайнов. — В кн.: Статистический анализ в демографии. — М.: Статистика, 1980.
- Мак-Фарланд McFarland D. D. On the theory of stable population. — Demography, 1969, vol. 6, N 3.
- Марксистско-ленинская теория народонаселения. — М.: Мысль, 1974.
- Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972.
- Миронов Б. Н. Традиционное демографическое поведение крестьян в XIX — начале XX века. — В кн.: Брачность, рождаемость, смертность в России и в СССР. — М.: Статистика, 1977.
- Митра С., Романюк А. Кривая Пирсона первого типа и возможность ее применения для прогноза рождаемости. — В кн.: Статистический анализ в демографии. — М.: Статистика, 1980.
- Моисеев Н. Н. Простейшие модели экономического прогнозирования. — М.: Знание, 1975.
- Народонаселение стран мира — справочник. — М.: Статистика, 1974.
- Народонаселение стран мира — справочник. — М.: Статистика, 1978.
- Население СССР — справочник. — М.: Политиздат, 1974.
- Население СССР — справочник. — М.: Политиздат, 1983.
- Организация Объединенных Наций. Методы исчисления основных демографических показателей по неполным данным. — Нью-Йорк: ООН, 1971.
- Организация Объединенных Наций. Методы перспективных исчислений числа хозяйств и семей. — Нью-Йорк: ООН, 1973.
- Организация Объединенных Наций. United Nations. Prospects of population: methodology and assumptions. — N. Y., 1977.
- Организация Объединенных Наций. United Nations. Population projections: problems and solutions. — N. Y., 1981.
- Парлетт. Parlett B. Ergodic properties of population. — Theoretical population biology, 1970, vol. 1, N 2.
- Планка Э. Эволюционная экология. — М.: Мир, 1981.
- Пирожков С. И. Демографические процессы и возрастная структура населения. — М.: Статистика, 1976.
- Поллард. Pollard J. H. Mathematical models for the growth of human populations. — Cambridge, 1973.
- Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. — М.: Финансы и статистика, 1982.
- Региональные особенности воспроизводства и миграции населения в СССР. — М.: Наука, 1981.
- Роджерс Rogers A. Introduction to multiregional mathematical demography. — N. Y., 1975.

- Роджерс Rogers A. Migration and settlement. — Options (IIASA), 1983, N 1.
- Роджерс, Кастро. Rogers A., Castro L. Model migration schedules. — Laxenburg, 1981.
- Россет Э. Продолжительность человеческой жизни. — М.: Прогресс, 1981.
- Самуэлсон Samuelson P. A. An economist's non-linear model of self-generated fertility waves. — Population Studies, 1976, vol. 30, N 2.
- Свиридов Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.
- Свиридов Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики. — М.: Наука, 1982.
- Соболева Soboleva S. Migration and settlement: Soviet Union. — Laxenburg, 1980.
- Староверов О. В. Модели движения населения. — М.: Наука, 1979.
- Староверов О. В. Марковские модели мобильности населения. — В кн.: Математический аппарат экономического моделирования. — М.: Наука, 1983.
- Сундберг Sundberg A. G. Aperçus statistique internationaux. — Stockholm, 1908.
- Уилкинс, Роджерс Willekens F., Rogers A. Spatial population analysis: methods and computer programs. — Laxenburg, 1978.
- Урланис Е. Б. Демографическая политика в рабовладельческом и феодальном обществах. — В кн.: Вопросы демографии. — М.: Статистика, 1970.
- Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машины методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.
- Хаджнал Дж. Европейский тип брачности в ретроспективе. — В кн.: Брачность, рождаемость, семья за три века. — М.: Статистика, 1979.
- Хорев Б. С., Моисеенко В. М. Сдвиги в размещении населения СССР. — М.: Статистика, 1976.
- Черемных Ю. Н. Качественное исследование оптимальных траекторий динамических моделей. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
- Черемных Ю. Н. Анализ поведения траекторий динамики народнохозяйственных моделей. — М.: Наука, 1982.
- Чоудхури Х. Ч. Относительный доход и рождаемость. — В кн.: Статистический анализ в демографии. — М.: Статистика, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Демографический переход	7
1. Концепция демографического перехода	7
2. Трендовая конструкция	15
Глава 2. Дискретные модели популяций	28
1. Разностное уравнение Лотки	29
2. Аппроксимации собственных чисел	32
3. Матричная модель Лесли	36
4. Теорема Коула — Лопеса	41
Глава 3. Конструкция передвижки возрастов	44
1. Интерполяция статистических данных	44
2. Таблицы смертности	49
3. О моделировании миграции	55
Глава 4. Моделирование рождаемости	60
1. Брачность и возрастное распределение рождаемости	61
2. Микроимитационная модель рождаемости	68
Литература	75

Николай Борисович Баркалов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО
ПЕРЕХОДА

Зав. редакцией Н. А. Рябикова
Редактор Т. Г. Трубицына
Обложка художника О. Н. Гребенюк
Художественный редактор М. Ф. Евстафьев
Технический редактор М. Ю. Завражнова
Корректоры И. А. Мушникова, Т. С. Милякова

КБ № 8—33—84
ИБ № 1904

Сдано в набор 28.09.83
Подписано к печати 17.05.84
Л-78913 Формат 60×90/16
Бумага № 2 книжно-журнальная
Гарнитура литературная
Высокая печать
Усл. печ. л. 5,0 Уч.-изд. л. 5,2
Тираж 1470 экз. Заказ 223
Цена 80 коп. Изд. № 2704

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы