Е. М. Андреев, Л. Е. Дарский

ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОСПРОИЗВОДСТВА

Вводные замечания. Специфическая особенность демографических и демоэкономических процессов состоит в том, что всякая достаточно развитая модель динамики включает хотя бы две переменные, имеющие размерность времени, собственно календарное время и возраст.

Модели более сложные могут включать иные аналогичные переменные: интервал с момента вступления в брак, интервалы после рождения ребенка данной очередности, интервал после расторжения брака и т. д.

Наличие двух временны́х характеристик серьезно затрудняет не только процесс моделирования, но и количественное измерение параметров модели на основе данных статистики и содержательную интерпретацию результатов моделирования. Отсюда вытекает естественное стремление редуцировать модель к одной временно́й переменной.

Всюду далее мы будем пользоваться демографическими моделями, относимыми к классу непрерывных детерминистских макромоделей. Непрерывность означает, что в рассматриваемых моделях численность населения, число демографических событий и другие демографические характеристики описываются непрерывными и дифференцируемыми функциями от времени, возраста и иных переменных, имеющих размерность времени. Конечно, численность населения в реальной жизни — целая величина и всегда меняется дискретно, однако всякая дискретная функция может быть с любой требуемой точностью приближена непрерывными, что полностью оправдывает использование этого аппарата в модели.

В детерминистских моделях не делается различия между вероятностью и частотой (частостью) демографических событий. Конечно, допущение о совпадении вероятности и частоты достаточно условно, однако в больших популяциях различие между ними столь мало, что может не учитываться в анализе. Рассматриваемые модели описывают динамику больших совокупностей и не переходят на уровень семьи, брачной пары или индивидуума, поэтому их называют макромоделями.

Мы не будем специально рассматривать вопросы практических расчетов на основе непрерывных моделей с привлечением данных реальной статистики населения. В основе этих расчетов лежат стандартные правила вычислительной математики.

Все модели воспроизводства в первом приближении строятся для закрытой системы, что для населения означает отсутствие миграции, т. е. численность и структура населения меняются во времени, только под влиянием процессов, происходящих внутри рассматриваемой совокупности. Численность населения увеличивается только в результате рождений и уменьшается только в результате смертей.

Общее описание непрерывной модели воспроизводства населения. В непрерывной модели воспроизводства населения возрастной состав и численность населения задаются непрерывной функцией $S(x, t)$, такой, что число лиц в момент t в интервале возрастов x, $x + \Delta x$ равно $S(x, t)\Delta x$. $S(x, t)$ — плотность распределения живущих по возрасту. Пусть аналогично $m(x, t)$ — плотность распределения умерших по времени смерти и возрасту, т. е. число умерших в интервале времени от t до $t + \Delta t$ в интервале возрастов $(x, x + \Delta x)$ равно $m(x, t)\Delta x \Delta t$. Обозначим через $n(x, t)$ плотность распределения родившихся по времени и возрасту матери: число родившихся в интервале времени $t, \; t + \Delta t$ у матерей в интервале возрастов от x до $x + \Delta x$ равно $n(x, t)\Delta x \Delta t$. Общее число родившихся в интервале времени $t, t + \Delta t$ равно $n(t)\Delta t$, причем $n(t) = \int\limits_0^\infty n(t, x)\, dx$. В закрытом населении выполняются следующие соотношения: $S(0, t) = n(t)$ и $S(x + \Delta x, t + \Delta t) = S(x, t) - m(x, t)\Delta x$.

Число родившихся и число умерших в каждый момент зависит, во-первых, от численности населения в соответствующем возрасте и, во-вторых, от интенсивности демографических процессов рождаемости и смертности.

В моделях применяются следующие меры интенсивности демографических процессов. Основной мерой смертности является интенсивность смертности в момент t в точном возрасте x, которую в демографической литературе называют силой смертности и обычно обозначают $\mu(x, t)$:

$$\mu(x, t) = m(x, t)/S(x, t). \tag{1}$$

Две другие характеристики смертности рассчитываются применительно к поколению, совокупности родившихся в некоторый момент времени в прошлом. Если в интервал времени $t_0, t_0 + \Delta t$ родилось $n(t)\Delta t$, то численность доживших до возраста x составит $S(x, t_0 + x)\Delta t$, а число умерших из них в интервале возрастов $x/x + \Delta x$ будет равно $m(x, t_0 + x)\Delta x \Delta t$. Деление этих величин на исходную численность родившихся дает две меры смертности: число (функцию) дожития $l(x, t)$ и число умерших $d(x, t)$. Они исчисляются так:

$$l(x, t) = S(x, t)/n(t - x), \tag{2}$$

$$d(x, t) = m(x, t)/n(t - x). \tag{3}$$

Поскольку $d(x, t)n(t - x) = \mu(x, t)S(x, t) = \mu(x, t) \cdot l(x, t)n(t - x)$, то

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) l(x, t) = \mu(x, t). \tag{4}$$

Решая уравнение (4) относительно $l(x, t)$, находим

$$l(x, t) = e^{-\int\limits_0^x \mu(y, t-x+y)dy}. \tag{5}$$

Из (2) и (3) следует

$$l(x,t) = 1 - \int_0^x d(y, t - x + y)\,dy. \qquad (6)$$

Когда речь идет о смертности, все введенные соотношения в равной мере справедливы и для мужчин, и для женщин, и для двух полов суммарно. Для рождаемости это не так, и обычно ограничиваются рассмотрением женского населения, при этом учитывают лишь рождения девочек; аналогичные соотношения верны для мужчин. Ниже мы остановимся на возможностях перехода от однополой к двуполой модели воспроизводства населения.

В рамках однополой модели мерой рождаемости, аналогичной $\mu(x, t)$, служит интенсивность рождений $\varphi(x, t)$, равная

$$\varphi(x, t) = n(t, x)/S(t, x). \qquad (7)$$

Величина, аналогичная $d(x, t)$, записывается как

$$f(x, t) = n(t, x)/n(t - x), \qquad (8)$$

при этом число рождений в расчете на женщину, родившуюся в момент t к возрасту x, составляет $F(x, t + x) = \int_0^x f(y, t + y)\,dy$.

В демографии рассматриваются две суммарные характеристики рождаемости. Введенная величина $F(x, t)$ характеризует число рожденных к данному возрасту детей с учетом смертности. С учетом (2) она равна

$$F(x,t) = \int_0^x \varphi(y, t - x + y)\, l(y, t - x + y)\,dy. \qquad (9)$$

При отсутствии смертности число рождений к возрасту x составляло бы

$$\Phi(x,t) = \int_0^x \varphi(y, t - x + y)\,dy. \qquad (10)$$

Отметим, что меры возрастной рождаемости отличны от 0 лишь в определенном интервале возрастов (так называемые плодовитые возраста). В силу этого вместо интеграла от 0 до ∞ (или до x) может рассматриваться интеграл от β_1 до β_2 (или x), где β_1 и β_2 — начало и конец плодовитого возраста.

Соединяя соотношения (2) и (7), получаем общее соотношение связи, известное как интегральное уравнение воспроизводства

$$n(t) = \int_0^\infty \varphi(x, t)\, l(x, t)\, n(t - x)\, dx. \qquad (11)$$

Уравнение показывает, что при заданных φ и l (или φ и μ) число родившихся в момент t полностью определено числом родившихся в прошлые периоды.

Кумулятивные характеристики воспроизводства населения. Наиболее распространенными кумулятивными характеристиками демографического воспроизводства являются следующие величины.

Средняя продолжительность предстоящей жизни для новорожденного (родившегося в момент t), которая равна

$$e(0, t) = \int_0^\infty l(x, t + x)\, dx, \qquad (12)$$

и аналогичная ей характеристика для лица в момент t, находящегося в возрасте x,— средняя продолжительность предстоящей жизни в возрасте x, которая равна

$$e(x, t) = \int_x^\infty l(y, t + y)\, dy / l(x, t). \qquad (12а)$$

Чистая мера рождаемости исчисляется с помощью брутто-коэффициента воспроизводства (суммарной рождаемости) для поколения женщин, родившихся в момент t:

$$R_b(t) = \int_0^\infty \varphi(x, t + x)\, dx \qquad (13)$$

—среднее число рождений без учета смертности.

Уровень рождаемости в поколении с учетом смертности измеряется нетто-коэффициентом воспроизводства:

$$R_0(t) = \int_0^\infty f(x, t + x)\, dx. \qquad (14)$$

Величина $R_0(t)$ равна среднему числу девочек, которых когда-либо родит женщина, родившаяся в момент t при данном уровне рождаемости и смертности. Из (10) и (14) следует

$$R_0(t) = \int_0^\infty \varphi(x, t+x)\, l(x, t+x)\, dx. \tag{14a}$$

Смысл этих величин наиболее полно раскрывается в модели стабильного населения.

Стабильное население. Если величины $\mu(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ неизменны во времени, то не меняется во времени и величина $l(x, t)$.

Как показано в серии работ А. Лотки, вышедших в 20-е годы, если возрастные интенсивности рождаемости и смертности были неизменны на протяжении всей истории населения, то плотность рождений $n(t)$ ведет себя как экспоненциальная функция времени

$$n(t) = n(0)e^{rt}. \tag{15}$$

Причем из интегрального уравнения (11) следует, что величина $n(t)$ полностью определена функциями $l(x, \widehat{t})$ и $\varphi(x, \widehat{t})$[1] и представляет собой единственный действительный корень уравнения

$$\int_0^\infty l(x, \hat{t})\, \varphi(x, \hat{t})\, e^{-rx} dx = 1. \tag{16}$$

Величина r получила название коэффициента естественного прироста стабильного населения с функциями дожития l и рождаемости φ. Возрастные численности населения в силу (2) и (15) определяются функцией

$$S(x, t) = n_0 l(x, \hat{t})\, e^{rt}. \tag{17}$$

Население, определенное системой соотношений (15)÷(17) называется стабильным населением. Ценность модели стабильного населения определяется следующим утверждением, также доказанным А. Лоткой: если в некотором населении начиная с момента t_0 установятся неизменные возрастные интенсивности рождаемости и смертности $\varphi(x, t)$ и $\mu(x, t)$, то данное население со временем приобретет все характеристики стабильного населения с функцией дожития $l(x) = e^{-\int_0^x \mu(y, t_0) dy}$ и функ-

[1] Мы сохранили в формулах параметр t, но отметили его «$\wedge$» в знак того, что он может быть исключен.

цией рождаемости $\varphi(x, t)$. Период, в течение которого население приобретает параметры стабильного населения (период стабилизации), невелик и для реальных населений по расчетам не превышает 12—15 десятилетий.

В силу приведенного утверждения модель стабильного населения становится удобным способом проективной оценки параметров воспроизводства по принципу: «что будет, если возрастные интенсивности рождаемости и смертности не изменятся в будущем?»

В модели стабильного населения все формулы для расчета кумулятивных характеристик могут быть записаны без параметра t или при произвольном значении t. В частности, интегральные соотношения (12)÷(14а) могут быть выписаны не только для совокупности родившихся в некоторый момент t, но и для календарного периода t. Иначе говоря,

$$e_{(0)} = e(0, t) = \int_0^\infty l(x, \widehat{t})\, dx, \tag{18}$$

$$R_b = R_b(t) = \int_0^\infty \varphi(x, \widehat{t})\, dx, \tag{19}$$

$$R_0 = R_0(t) = \int_0^\infty l(x, \widehat{t})\, \varphi(x, \widehat{t})\, dx. \tag{20}$$

Из равенств (18)÷(20) ясно, что $R_0 < R_b$, поскольку $l(x, t) < 1$ при $x > 0$, а $R_b - R_0$ тем меньше, чем больше $e(0)$, т. е. число рожденных детей в отсутствии смертности больше, чем с учетом смертности, причем разность тем меньше, чем выше средняя продолжительность жизни.

Сопоставим уравнения (20) и (16). Величина, стоящая в левой части (16),— обозначим ее $G(r)$ — непрерывная и дифференцируемая функция r. Найдем

$$\frac{dG(r)}{dr} = \frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty l(x, t)\, \varphi(x, t)\, e^{-rx} dx = -\int_0^\infty x l(x, t)\, \varphi(x, t) e^{-rx} dx.$$

Это выражение всегда отрицательно, и, значит, $G(r)$ убывает с ростом r. Ясно, что $G(0) = R_0$ и если $R_0 = 1$, то $r = 0$ — есть решение уравнения (16). Если $R_0 < 1$, то $G(r) = 1$ при $r < 0$, т. е. численность населения убывает с возрастом, если $R_0 > 1$, то $G(r) = 1$ при $r > 0$ и население растет во времени.

Таблица 1

Три варианта оценки средней продолжительности жизни календарного периода *

Показатель	Расчет, исходя из величин		
	$\mu(x,t)$	$d(x,t)$	$l(x,t)$
Мужчины			
1878—1882 гг.	46,6	54,4	41,8
1898—1902 гг.	51,5	57,3	45,9
Женщины			
1878—1882 гг.	49,5	55,5	45,7
1898—1902 гг.	54,3	58,8	49,3

* Рассчитано по данным Швеции [13].

В модели стабильного населения

если $R_0 < 1$, то $r < 0$ и численность населения убывает во времени;

если $R_0 = 1$, то $r = 0$ и численность населения неизменна;

если $R_0 > 0$, то $r > 0$ и численность населения растет во времени.

Гипотетическое поколение. Если в стабильной ситуации расчет для календарного периода и для реального поколения дает одни и те же результаты, то в реально меняющейся демографической ситуации результаты зависят от того, проводить расчеты вдоль линии, заданной соотношением $t - x = \text{const}$ (т. е. для реального поколения), или вдоль линии $t = \text{const}$ (для календарного периода). Более того, не вполне ясно, что значит вести расчеты для календарного периода. Соотношения (4)—(6), (9)—(10) позволяют формально переходить от одного показателя к другому, опуская параметр времени. В частности, зафиксировав в момент t величины $\mu(x, t)$ и $d(x, t)$, мы можем рассчитать на их основе с помощью равенств (5) и (6) величину $l(x)$, которая, кроме того, может быть замерена непосредственно. На основе каждой из трех функций l может быть рассчитана средняя продолжительность предстоящей жизни, причем указанные три величины могут весьма существенно различаться (см. табл. 1). Какую же из них следует трактовать как оценку смертности календарного периода?

Сформулированный выше проективный подход к демографическому анализу данных календарного периода позволяет достаточно однозначно выбрать оптимальный показатель. Как для анализа рождаемости, так и при анализе смертности ими являются показатели интенсивности: интенсивность рождаемости $\varphi(x, t)$ и интенсивность смертности $\mu(x, t)$.

С содержательных позиций расчет кумулятивных характеристик демографических процессов для определенного календарного периода означает расчет их для некоторого модельного поколения родившихся и проживших всю жизнь при интенсивностях демографических процессов, характерных для данного календарного периода (подробнее см.: [1]), т. е. для так называемого гипотетического поколения.

Вопрос о том, в какой мере данные календарного периода характеризуют показатели для реальных поколений, мало изучен. В частности, как величины $l(x, t)$, $e(0, t)$, $R_0(t)$, $R_1(t)$, исчисленные для реальных поколений и для календарных периодов (обозначим их $l^{\text{гип}}(x/t)$, $e^{\text{гип}}(0/t)$, $R_0^{\text{гип}}(t)$, $R_1^{\text{гип}}(t)$ в знак того, что они рассчитаны для гипотетического поколения), соотносятся между собой.

Как мы уже отмечали ранее, в стабильной ситуации показатели для реальных и гипотетических поколений совпадают. Из цитированной работы Е. М. Андреева следует, что в случае монотонного изменения смертности или рождаемости показатель средней продолжительности жизни, или брутто-коэффициент воспроизводства, для гипотетического поколения равен соответствующему показателю хотя бы для одного из поколений, живущих в момент наблюдения. Однако в случае немонотонных изменений последнее утверждение неверно.

Представим величину $\mu(x, t)$ как

$$\mu(x, t) = \mu(x) + \gamma(x, t), \tag{21}$$

где $\mu(x)$ — некоторая стандартная кривая смертности. Пусть $l(x)$ — соответствующая $\mu(x)$ функция дожития

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(y)dy}, \tag{22}$$

тогда

$$l(x, t) = l(x)\, e^{-\int_0^x \gamma(x, t-x+y)dy}. \tag{23}$$

Величина $l^{\text{гип}}(x/t)$ для гипотетического поколения периода t равна

$$l^{\text{гип}}(x/t) = l(x)e^{-\int\limits_0^x \gamma(y,t)dy}. \tag{24}$$

С учетом равенств (23) и (24) удобно записать

$$\varphi(x,\ t) = \varphi(x)e^{\nu(x,t)}, \tag{25}$$

где $\varphi(x)$ — стандартная функция рождаемости. Запись (25) возможна, так как и $\varphi(x,\ t)$, и $\varphi(x)$ больше 0, т. е. выражение $\ln(\varphi(x,\ t)/\varphi(x)) = \nu(x,\ t)$ определено.

Крайним случаем немонотонных изменений являются периодические колебания. Но при анализе демографических данных нас, как правило, интересуют не локальные колебания интенсивности демографических процессов, а общие закономерности динамики, и если анализировать динамику в среднем за относительно длительные периоды, то можно ограничиться случаем монотонного изменения интенсивностей рождаемости и смертности.

Кумулятивные характеристики воспроизводства населения, рассчитанные для реальных и гипотетических поколений, и реальная динамика численности населения. Воспользуемся соотношениями (22)$\div$(25) для того, чтобы оценить, в какой мере можно судить о динамике населения на основе кумулятивных показателей для реального и гипотетического поколений в нестабильной ситуации.

Допустим, что возрастные интенсивности смертности монотонно снижаются, т. е. $\gamma(x,\ t) < 0$. Обозначим их соответственно через $\lambda(x,\ t)$ и $\lambda^{\text{гип}}(x, t)$:

$$\lambda(x,\ t) = \int\limits_0^x \gamma(y,\ t - x + y)\,dy, \tag{26}$$

$$\lambda^{\text{гип}}(x,\ t) = \int\limits_0^x \gamma(y,\ t)\,dy. \tag{27}$$

Если $\gamma(x,\ t) < 0$, то легко показать, что

$$\lambda^{\text{гип}}(x,\ t) < \lambda(x,\ t) < 0. \tag{28}$$

Предположим, что и возрастные интенсивности рождаемости также снижаются $\nu(x,\ t) < 0$.

С учетом равенств (23), (25) и (26) интегральное уравнение воспроизводства запишется так:

$$n(t) = \int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,n(t-x)\,e^{\nu(x,t)-\lambda(x,t)}dx. \tag{29}$$

При тех же предположениях численность населения в момент t равна

$$S(t) = \int_0^\infty n(t-x)\,l(x)\,e^{\lambda(x,t-x)}dx. \tag{30}$$

Исходя из равенств (23)—(25), нетто-коэффициенты воспроизводства для реального поколения родившихся и для гипотетического поколения момента t окажутся равными

$$R_0^{\text{р}}(t) = \int_0^\infty l(x, t+x)\,\varphi(x, t+x)\,dx =$$

$$= \int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,e^{\nu(x,t+x)-\lambda(x,t+x)}dx, \tag{31}$$

$$R_0^{\text{гип}}(t) = \int_0^\infty l(x, t)\,\varphi(x, t)\,dx = \int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,e^{\nu(x,t)-\lambda^{\text{гип}}(x,t)}dx. \tag{32}$$

Рассмотрим несколько частных примеров. Допустим, что в течение достаточно длительного периода выполняются неравенства

$$\lambda^{\text{гип}}(x, t) \leqslant \nu(x, t) \leqslant \lambda(x, t), \tag{33}$$

причем хотя бы одно из неравенства строгое. Кроме того, предположим, что разности $\nu(x, t) - \lambda(x, t)$ и $\nu(x, t) - \lambda^{\text{гип}}(x, t)$ не зависят от t:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nu(x, t) - \lambda(x, t)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\nu(x, t) - \lambda^{\text{гип}}(x, t)\right) = 0. \tag{34}$$

Такая ситуация возможна, если, например, предположить, что

$$\gamma(x, t) = kt\ \lambda(x, t) = k(tx + x^2/2),$$

$$\lambda^{\text{гип}}(x, t) = ktx,$$

$$\nu(x, t) = ktx + \chi(x), \tag{35}$$

где $\chi(x)$ — произвольная функция. Отметим, что система равенств (35) далеко не единственная возможность.

Пример 1. Допустим, что $\nu(x, t) = \lambda(x, t)$, а $R_0 = \int l(x)\varphi(x)\,dx = 1$. Тогда, поскольку $\nu(x, t) - \lambda^{\text{гип}}(x, t) > 0$, нетто-коэффициент воспроизводства для гипотетического поколения $R^{\text{гип}}(t) < 0$, а для реального — равен 1. Из уравнения (29) видно, что $n(t) = n(0)$ при данных условиях является его решением, т. е. плотность рождений не меняется со временем, в то же время в силу (32) численность населения постоянно растет.

Пример 2. При тех же предположениях допустим, что R_0 несколько меньше 1. В этом случае число родившихся экспоненциально убывает со временем, $n(t) = ne^{rt}r < 0$. В то же время, если R_0 достаточно близко к единице, величина $R_0^{\text{гип}}(t)$ может оставаться больше 1, а численность населения — расти во времени. В самом деле, численность населения в силу равенства (33) и если допустить (35) равна

$$S(t) = \int_0^\infty n(0)e^{r(t-x)}e^{K\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)}l(x)dx = n_0e^{rt}\int_0^\infty e^{ktx-rx-\frac{kx^2}{2}}\,l(x)dx$$

и при малых r ее временную динамику определяет не величина r, а величина k.

Пример 3. Расчеты показывают, что можно подобрать такие параметры, когда одновременно окажется, что нетто-коэффициент для реального поколения меньше 1, для гипотетического — равен 1, а медленный устойчивый рост численности населения сохраняется в течение весьма длительного периода, за который величина средней продолжительности жизни возрастает с 35 до 70 лет.

Пример 4. Предположим теперь, что смертность снижается, а рождаемость остается неизменной. Причем величины $\gamma(x, t)$ не зависят от возраста, т. е. $\frac{\partial}{\partial x}\gamma(x, t) = 0$. Это теоретическое население, предложенное Ж. Буржуа-Пиша, получило название полустабильного или частично стабильного населения.

Основное свойство полустабильного населения — неизменность во времени его возрастной структуры. Если предположить, что

$$\int_0^\infty l(x)\varphi(x)\,dx = 1,$$

то коэффициент естественного прироста реального населения в момент t равен $-\gamma(t)$. Поскольку возрастная структура неизменна, то и $\frac{\partial}{\partial t} n(t) = -\gamma(t)\, n(t)$.

Исходя из формул (26) и (31), делаем вывод, что нетто-коэффициент воспроизводства, исчисленный для реального поколения, равен

$$R_0(t) = \int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,e^{-\int_0^x \gamma(t-x+y)dy}\,dx,$$

а нетто-коэффициент воспроизводства для гипотетического поколения равен

$$R_0^{\text{гип}}(t) = \int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,e^{-\gamma(t)x}dx.$$

Если же для режима воспроизводства, соответствующего гипотетическому поколению, т. е. с функциями $\varphi^{\text{гип}}(x) = \varphi(x)$ и $l^{\text{гип}}(x,\ t) = l(x)e^{-\gamma(t)x}$, определить коэффициент естественного прироста, то он окажется равным $-\gamma(t)$. Значит, коэффициенты естественного прироста реального и стабильного населения совпадают, а величина $R_0^{\text{гип}}$ адекватно характеризует рост населения. Нетрудно показать, что величина $R_0(t)$ существенно меньше $R_0^{\text{гип}}(t)$. Для простоты предположим, что $\gamma(t)$ — линейная функция времени, тогда $\gamma(t) = kt$:

$$R_0(t) = \int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,e^{-k\left(tx-\frac{x^2}{2}\right)}dx = e^{-ktx}\int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,e^{-\frac{kx^2}{2}}\,dx,$$

причем выражение под знаком интеграла существенно меньше 1.

Пример 5. Рождаемость снижается, а смертность неизменна. Допустим, что $\nu = kt$, $k < 0$. Тогда

$$R_0(t) = e^{kt}\int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,e^{kx}dx,$$

$$R_0^{\text{гип}}(t) = e^{kt}\int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Допустим, что режиму воспроизводства с функцией дожития $l(x)$ и рождаемости $\varphi(x)$ соответствует стабильное население с коэффициентом естественного прироста k. Тогда

$$R_0(t) = e^{kt}, \quad R_1^{\text{гип}}(t) = e^{kt}R_1.$$

Пусть $\ln R_1/-k = T$: величина T получила в демографической литературе название «длина поколения». Тогда $R_1^{\text{гип}}(t) = e^{k(t-T)}$ или же

$$R_0^{\text{гип}}(t) = R_0(t+T).$$

Интегральное уравнение воспроизводства в данном случае записывается как

$$n(t) = \int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,n(t-x)\,e^{kt}dx$$

или же

$$n(t) = e^{kt}\int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,n(t-x)\,dx.$$

Допустим, что $n(t) = e^{-kt}g(t)$, тогда

$$g(t)\,e^{-kt} = e^{kt}e^{-kt}\int_0^\infty l(x)\,\varphi(x)\,g(t-x)\,e^{kx}dx$$

или же

$$g(t)e^{-kt} = g(t-\bar{x}),$$

где t лежит в интервале от 15 до 50 лет. Отсюда

$$n(t) = n(t-\bar{x})e^{kt}, \quad k < 0,$$

т. е. величина $n(t)$ убывает.

Множество примеров неисчерпаемо. Возможны и другие, еще более неожиданные ситуации. В то же время примеры, сколько бы их ни было, еще не доказательство. Ясно одно: в нестабильной ситуации традиционных кумулятивных характеристик, рассчитанных ни для реального, ни тем более для гипотетического поколения, недостаточно, чтобы достоверно судить о динамике населения. Ниже мы рассмотрим ряд обобщений нетто-коэффициента воспроизводства, эффективных в нестабильной ситуации, но в целом вывод достаточно ясен: в динамической ситуации анализ невозможен исходя из данных за один период или для одного поколения. Необходимо рассматривать динамику за длительные периоды.

Влияние возрастной структуры населения, потенциал роста. Другие структуры населения. При анализе реальных данных приходится сталкиваться еще с целым рядом трудностей, от которых мы абстрагировались ранее. В тот момент, когда в населении устанавливается некоторый определенный режим воспроизводства или начиная с которого намечается определенная динамика возрастных показателей рождаемости и смертности, население определяется вполне определенной возрастной структурой, которая существенно влияет на динамику численности населения. Со временем влияние возрастной структуры ослабевает. В случае неизменных режимов рождаемости и смертности это впервые доказал А. Лотка [15], при меняющихся — А. Коул [10] и А. Лопес [14].

Влияние возрастной структуры на рост населения измеряется с помощью потенциала роста населения. Понятие потенциала достаточно полно рассмотрено в демографической литературе на русском языке. Короче говоря, суть понятия потенциал состоит в следующем. Пусть режим воспроизводства остается неизменным начиная с некоторого момента времени $t = 0$. Если бы население было стабильным, то его численность менялась бы по закону $S(0)\ e^{rt}$, где r — коэффициент естественного прироста стабильного населения с данными возрастными интенсивностями рождаемости и смертности. Доказано, что существует предел отношения

$$V = \lim_{t\to\infty} S(t)/S(0)\ e^{rt}. \tag{36}$$

Величина V и получила название потенциала роста населения. Эта величина характеризует влияние возрастной структуры на рост населения при заданном режиме. Как видно, например, из табл. 2 (на диагонали стоят реальные потенциалы роста), потенциал роста зависит не только от возрастной структуры, но и от режима воспроизводства.

Рост населения зависит не только от возрастной, но и от других демографических структур, в частности от брачного состава населения или распределения женщин по числу рожденных детей, от способа измерения рождаемости. Например, функция рождаемости может рассматриваться, как это было сделано выше, только как функ-

Таблица 2

Потенциал роста населения СССР *

Год	При режиме воспроизводства населения			
	1896—1897 гг.	1926—1927 гг.	1958—1959 гг.	1969—1970 гг.
1896	**1,007**	1,040	1,326	1,218
1926	1,022	**1,056**	1,343	1,494
1959	0,826	0,852	**1,056**	1,161
1970	0,795	0,829	1,005	**1,104**

* Источник: [5, с. 278].

ция возраста. В этом случае

$$\varphi(x, t) = \sum_i \varphi^i(x, t)\, S^{i-1}(x, t)/S(x, t),$$

где $S^{i-1}(x, t)$ — плотность возрастного распределения женщин, родивших ровно i детей, $\varphi^i(x, t)$ — вероятность рождения ребенка i-й очередности. Результат анализа методом проекции на будущее зависит от того, что принять неизменным: просто возрастную рождаемость или рождаемость с учетом очередности рождений. С различных точек зрения вторая гипотеза предпочтительнее, хотя и хуже обеспечена данными статистики. Распределение женщин по числу рожденных детей стабилизируется (т. е. приходит в соответствие с распределением, определенным функциями φ^i) примерно через 40—50 лет, но за этот период особенности состава существенно влияют на рост населения и конкретные значения функции $\varphi(x, t)$, которая меняется вместе с изменением соотношения численности женщин с разным числом детей в совокупности x-летних [6, с. 86—115]. В табл. 3 приведены данные, иллюстрирующие влияние модели на характеристики стабильного населения ряда зарубежных стран. При этом учтено не только распределение женщин по числу рожденных детей, но и брачный состав населения.

Таким образом, в нестабильной ситуации рост населения зависит в значительной мере от степени соответствия возрастной и иных структур населения режиму воспроизводства, причем влияние этого фактора не может не учитываться при динамическом анализе. Кроме того, при анализе методом проекции на будущее результаты существенно зависят от степени детальности избранной модели.

Таблица 3

Коэффициент естественного прироста (на 1000 человек населения) *

Страна, год	Общий коэффициент	Коэффициент стабильного населения, рассчитанного с учетом			
		повозрастной рождаемости	очередности рождений	брачности и брачной рождаемости	брачности и брачной рождаемости по очередности рождений
Англия и Уэльс 1951	2,2	0,2	1,0	3,1	3,2
1961	4,3	8,9	10,5	11,9	11,4
Ирландия 1961	9,4	17,6	19,4	20,6	20,6
Канада 1961	18,4	21,8	24,0	22,7	22,9
США 1960	14,7	20,8	23,0	18,4	19,6
Франция 1954	5,1	4,1	5,2	5,0	5,9
Чехословакия 1961	6,8	5,2	5,2	7,6	5,7

* *Источник:* [16].

Расширение понятия воспроизводства населения и его меры. Вопрос о том, в какой мере данное поколение родителей воспроизводит себя в своем потомстве, может быть поставлен по-разному. Наиболее традиционная в демографии постановка вопроса — оценить соотношение числа рожденных детей с исходной численностью родительского поколения. Ответом на такой вопрос служит обычный нетто-коэффициент воспроизводства женского населения.

Если поставить вопрос несколько иначе — скажем, оценить, в какой мере не число новорожденных а число 15-летних женщин воспроизводится в следующем поколении, то ту же формулу нетто-коэффициента воспроизводства можно написать иначе:

$$R_{15} = \frac{\int\limits_0^\infty l'(x)\,\varphi(x)\,l''_{15}dx}{l'_{15}}, \qquad (37)$$

где l'_x — функция дожития в поколении матерей, l''_x — функция дожития в поколении дочерей. Ясно, что если смертность поколений дочерей и матерей одинакова, то $l'_{15} = l''_{15}$ и $R_{15} = R_0$.

Таким образом, при поперечном анализе нетто-коэффициент воспроизводства гипотетического поколения женщин любого фиксированного возраста будет одинаков, так как в гипотетическом поколении смертность матерей и дочерей принимается единой и неизменной во времени. При продольном анализе все зависит от динамики смертности и соотношения смертности разных поколений.

Если функцию дожития поколения родившихся в момент T обозначить $l_{T(x)}$, то нетто-коэффициент воспроизводства численности женщин возраста τ будет равен

$$R_{T,\tau} = \frac{\int\limits_0^\infty l_T(x)\,\varphi(x)\,l_{T+x}(\tau)\,dx}{l_T(\tau)}. \tag{38}$$

При снижающейся смертности, когда смертность поколения дочерей меньше, чем поколения матерей, уровень воспроизводства женщин более старшего возраста будет выше, чем более младшего. Возможны ситуации, когда поколение имеет суженное воспроизводство по числу рождений, простое воспроизводство — по числу вступивших в трудоспособный возраст и расширенное — по числу доживших до конца трудоспособного возраста. Именно такая ситуация характерна для поколений французских женщин, родившихся в середине прошлого века. Нетто-коэффициент воспроизводства французских женщин по числу рождений (R_0), по числу доживших до 15 лет (R_{15}), по числу доживших до 60 лет (R_{60}) и по общему числу человеко-лет жизни (R_e) представлен в табл. 4.

Можно поставить вопрос об уровне воспроизводства поколения не по числу доживших до какого-либо возраста, а по общему числу прожитых человеко-лет [12]. Если поколение женщин, родившихся в момент T, имеет среднюю продолжительность жизни, равную $e_T(0)$, а поколение их дочерей, родившихся через x лет,— $e_{T+x}(0)$, то родительское поколение воспроизведет себя по числу человеко-лет жизни с нетто-коэффициентом, равным

$$R_{T,e} = \frac{\int\limits_0^\infty l_T(x)\,\varphi_{(x)}e_{T+x}(0)\,dx}{e_T(0)}. \tag{39}$$

Таблица 4 *

Годы рождения поколений	Нетто-коэффициент воспроизводства поколения				Нетто-коэффициент воспроизводства в данном году
	R_0	R_{15}	R_{60}	R_e	
1836—1840	0,97	0,99	1,09	1,03	1,05
1841—1845	0,98	1,00	1,11	1,03	1,04
1846—1850	0,97	1,01	1,14	1,10	0,99
1851—1855	0,95	1,00	1,14	1,11	0,96
1856—1860	0,93	1,00	1,10	1,12	0,98
1861—1865	0,91	0,98	1,11	1,12	1,03
1866—1870	0,87	0,95	1,07	1,09	1,02
1871—1875	0,82	0,92	1,06	1,04	1,00

* *Источник:* [17, с. 248, 251; 11, с. 34].

Этот обобщающий коэффициент представляется нам более точно отражающим демографическое воспроизводство реальных поколений, чем коэффициенты, относящиеся к тому или иному возрасту. Если смертность не меняется во времени и $e_T(0) = e_{T+x}(0)$, то $R_e = R_0$. По величине R_e равен примерно нетто-коэффициенту воспроизводства численности женщин в возрасте, соответствующем среднему возрасту при рождении дочери (см. табл. 4). При неравномерной динамике смертности во времени, например вследствие войн и эпидемий, соотношения коэффициентов воспроизводства, особенно для мужчин, могут быть самые неожиданные.

Аналогично может быть решена задача оценки уровня воспроизводства не общего числа человеко-лет жизни, а числа лет жизни в том или ином периоде — в плодовитом, в трудоспособном, в пенсионном возрасте и т. п. Если обозначить начало и конец интересующего нас отрезка жизни через γ_1 и γ_2, то число лет жизни в данном интервале возраста, прожитых поколением родившихся в момент T, будет

$$e_{T,\gamma} = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} l_T(x)\, dx. \qquad (40)$$

Тогда нетто-коэффициент воспроизводства для этого отрезка жизни будет равен

$$R_{T,\gamma} = \frac{\int\limits_0^\infty l_T(x)\,\varphi(x)\,e_{T+x\gamma}dx}{e_{T,\gamma}}. \qquad (41)$$

Аналогичный подход может быть использован для оценки воспроизводства тех лет жизни, которые прожиты в том или ином состоянии. Например, воспроизводство числа лет жизни в браке; числа лет трудовой жизни, жизни в месте рождения, обучения и т. п. Если в возрасте x в поколении родившихся в момент T доля находящихся в интересующем нас состоянии будет равна $w_{T,x}$, то общее число лет, прожитых поколением T в этом состоянии, будет $w_T = \int\limits_0^\infty l_T(x)\,w_{T,x}dx$. Тогда поколение дочерей проживет в этом состоянии число лет, равное

$$\int\limits_0^\infty l_T(x)\,\varphi(x)\,w_{T,x}dx, \qquad (42)$$

а нетто-коэффициент воспроизводства для данного состояния будет

$$R_{T,w} = \frac{\int\limits_0^\infty l_T(x)\,\varphi(x)\,w_{T+x,x}dx}{w_T}. \qquad (43)$$

Оценка уровня воспроизводства тех или иных социальных, демографических или экономических состояний представляет значительный интерес. Например, мы знаем, что уровень рождаемости некоторых поколений женщин был низок и, несмотря на рост продолжительности жизни, воспроизводство числа лет жизни было суженным, но при этом произошел резкий рост женской занятости, и вполне вероятно, что воспроизводство числа лет трудовой жизни было расширенным. Значительный интерес представляет оценка уровня воспроизводства числа лет брачной жизни в связи с омоложением брачности, а также воспроизводство числа лет жизни в здоровом состоянии в связи со снижением смертности людей вообще и больных хроническими болезнями в частности.

Следует заметить, что при неизменности во времени повозрастных характеристик тех или иных состояний все меры воспроизводства становятся равными нетто-коэффициенту воспроизводства поколения по числу рождений.

Тот же подход дает возможность оценить уровень воспроизводства не только тех или иных состояний, но разного рода событий или действий, совершаемых за всю жизнь. Например, число браков и разводов, смен места жительства, перемен места работы, заболеваний и т. п. Для этого надо только иметь данные о частоте этих событий в разных возрастах у разных поколений.

До сих пор мы говорили о воспроизводстве женских поколений лишь постольку, поскольку оно традиционно рассматривается в демографии чаще, чем мужских. Та же логика дает возможность рассмотреть и воспроизводство мужских поколений [2].

Уровень воспроизводства отдельных характеристик мужских и женских поколений может не совпадать и, как правило, не совпадает.

Экономико-демографическое воспроизводство и его моделирование. Экономическое воспроизводство в экономико-демографических моделях может рассматривать, или только материальное производство и потребление материальных благ, или включать все произведенные трудом блага и услуги. Последнее представление в некоторых случаях предпочтительнее для моделирования, так как позволяет точнее представить закономерности экономической деятельности. В частности, форма повозрастных кривых потребления сильно зависит от того, учтено ли потребление услуг здравоохранения, которое резко возрастает в детских и старческих возрастах, а также услуг образования, потребляемых в определенном возрасте. Стремление возможно полнее отразить экономическую деятельность приводит к тому, что в экономико-демографических моделях применяют обычно широкий подход.

Математические зависимости и соотношения, лежащие в основе моделей, не зависят от конкретной интерпретации и конкретного экономического содержания, которое вкладывается автором в повозрастные функции, и поэтому обычно вместо четких терминов политической экономии и экономической статистики при построении и описании экономико-демографических моделей используются

---

[2] При вычислении мужской функции рождаемости приходится прибегать к условности, так как не для всех родившихся известен возраст отца; обычно этих родившихся распределяют пропорционально структуре тех родившихся, у которых известен отец.

неопределенные понятия «производство» (произведенное), «потребление» (потребленное), «производительность» и т. п. Форма модели не зависит от содержания этих понятий; но необходимо, чтобы в рамках одной модели показатели производства и потребления были строго сопоставимы.

Современные представления о существующих экономико-демографических закономерностях были изложены Б. Ц. Урланисом в 1971 г. [8]. Обычно рассуждения ведутся в терминах среднего человека в том смысле, какой этому понятию придавал Б. Ц. Урланис, говоря о биографии среднего человека. В таком рассуждении не принимаются во внимание различия в исходной численности поколений и их уменьшение с возрастом. Предполагается, что в каждом возрасте есть некий баланс произведенного и потребленного средним человеком. При этом в младших возрастах, пока человек ничего не производит, баланс отрицателен. С началом производительного труда отрицательный баланс уменьшается, пока не устанавливается нулевой баланс, т. е. пока человек (средний) не достигает возраста, в котором он производит столько же, сколько потребляет. Затем наступает период активной производительной деятельности и баланс положителен — человек производит больше, чем потребляет. Этот период длится до начала спада трудовой активности, когда положительный баланс уменьшается и сменяется отрицательным, который сохраняется до конца жизни.

Это простое рассуждение иллюстрируется графиком и рассматривается кумулятивный баланс к данному возрасту; его поведение с возрастом также легко себе представить. Предполагается как тривиальный факт, что общий накопленный итог экономической жизни среднего человека положителен.

Э. Валкович [4] количественно проанализировал описанные соотношения. Он пошел несколько дальше простой схемы для среднего человека и ввел влияние смертности, т. е. соотношения возрастных групп в поколении. Такой подход позволил автору трактовать приводимые им показатели как характеристики гипотетического поколения определенного момента и изобразить их в виде возрастно-половых пирамид, отражающих экономические соотношения.

Важность влияния смертности на экономико-демографические соотношения в реальной действительности бесспорна, и ее учет необходим, но смертность, безусловно, не единственный фактор такого рода. Сумма произведенного в данный момент зависит от сложившейся возрастной структуры населения, которая формируется под влиянием истории смертности и рождаемости.

Экономико-демографические соотношения для реальных поколений должны учитывать не только влияние смертности, но и влияние темпов роста экономических параметров во времени, а при сопоставлении разных поколений — также соотношения их численностей, т. е. темпов роста населения. На необходимость учета этих факторов указывает А. Сови в 24-й главе своей книги «Общая теория населения» [7]. Однако он, как и другие исследователи, ориентируется на функцию возрастного баланса производства и потребления, хотя эти компоненты баланса зависят от разных факторов.

Целесообразно учитывать в анализе две независимые функции производства и потребления, как это делает Э. Валкович; в этом случае необходимо отдельно учитывать темп роста населения и темп роста производительности. Естественно, что составление и анализ таких моделей намного сложнее, зато они позволяют глубже проникнуть в механизм экономико-демографических связей. Поэтому в первом приближении анализ целесообразно провести не на реальных данных, а на основе модели стабильного населения, в которой возрастно-половая структура данного момента зависит от уровня смертности и от темпов прироста.

Рассмотрим соотношения производства в реальном поколении. Обычно предполагается, что средняя производительность определенным образом зависит от возраста. При этом под производительностью в первом приближении понимается просто частное от деления общей суммы произведенного из численности населения, а под производительностью данного возраста понимается частное от деления общей суммы произведенного людьми данного возраста на общую численность населения данного возраста.

Для иллюстрации в графиках и расчетах взяты соотношения повозрастных душевых объемов производства и потребления по Венгрии за 1959—1960 гг., приведенные Э. Валковичем в [4]. Известные нам другие эмпирические данные не имеют принципиальных отличий. Все они получены на основе приблизительных оценок, и их различия не следует, по-видимому, приписывать целиком тому, что данные относятся к разным странам.

С этой точки зрения все проводимые для иллюстрации расчеты носят условный характер.

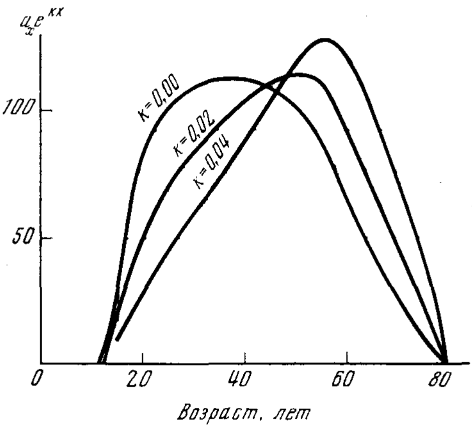

Рис. 1. Повозрастные коэффициенты производительности труда в реальных поколениях при разном темпе роста производительности труда (К)

Если обозначить производительность в возрасте x — a_x, то кривая a_x будет иметь форму, представленную на рис. 1. Такая форма кривой предполагается практически во всех экономико-демографических исследованиях, хотя они основываются на разных материалах — повозрастных распределениях заработной платы, повозрастном распределении производительности труда и т. п. По-видимому, форма кривой зависит прежде всего от формы кривой занятости и от установившихся границ трудоспособного возраста.

Эта кривая отражает соотношения производительности в определенный момент, и в моделях обычно предполагается, что они неизменны во времени. Но сама производительность растет во времени, поэтому если для гипотетического поколения соотношение производительности возраста x и $x + t$ равно $(a_{x+t})/a_x$, то для реального это соотношение будет равно $a_{x+t}e^{xt}/a_x$, где k — темп роста производительности во времени. Отсюда ясно, что кривая производительности для реального поколения зависит от k, она имеет вид, изображенный на рис. 1.

В гипотетическом поколении общая сумма произведенного поколением к возрасту x в расчете на одного родившегося равна

$$A(x) = \int_0^x a_x l_x \mathrm{d}x, \qquad (44)$$

где l_x — функция дожития из соответствующей таблицы

Таблица 5

Относительные суммарные объемы производства реальных поколений в зависимости от уровня смертности и темпа роста производительности

Уровень смертности по модели Э. Коула и П. Демени	Средняя продолжительность жизни	Темп роста производительности труда			
		0	0,02	0,04	0,06
6	31,2	0,89	0,61	1,02	1,84
8	36,2	0,45	0,72	1,22	2,24
10	41,1	0,53	0,84	1,43	2,66
12	46,0	0,59	0,95	1,65	3,09
14	51,0	0,66	1,06	1,86	3,53
16	55,7	0,72	1,18	2,10	4,04
18	60,6	0,82	1,28	2,29	4,41
20	65,5	0,84	1,39	2,50	4,86
22	70,5	0,90	1,50	2,75	5,26
24	75,7	0,95	1,59	3,01	5,77
Без учета смертности до 80 лет	86,5	1,00	1,71	3,21	6,56

смертности, а в реальном поколении эта величина будет равна

$$A(x) = \int_0^x a_x l_x e^{kx} dx. \tag{45}$$

Эта величина зависит от смертности — l_x и темпа роста производительности — k.

В табл. 5 приведены относительные суммарные объемы производства за всю жизнь в реальном поколении в зависимости от уровня смертности [9] и темпа роста производительности. За единицу принят объем производства поколением при отсутствии смертности до 80 лет и при нулевом темпе роста производительности.

Суммарный объем производства поколения приблизительно линейно зависит от средней продолжительности жизни, и эта зависимость связана с темпом роста производительности: чем выше производительность, тем быстрее растет суммарный объем производства с ростом средней продолжительности жизни.

Для сравнения суммарного объема произведенного поколением родителей и детей можно записать, что поколение родителей (матерей), родившееся в год T, произведет за всю свою жизнь

$$A_T = \int_0^\infty l_x^T a_x e^{k(T+x)} dx. \qquad (46)$$

Поколение дочерей, родившееся в год $T + x$, произведет за всю свою жизнь

$$A_{T+x} = \int_0^\infty l_y^{T+x} a_y e^{k(T+x+y)} dy,$$

а все дочери родительского поколения произведут

$$A' = \int_0^\infty l_x^T \varphi_x A_{T+x} dx.$$

Подставив значение A_{T+x}, получим

$$A' = \int_0^\infty l_x^T \varphi_x \left(\int_0^\infty l_y^{T+x} a_y e^{k(T+x+y)} dy \right) dx. \qquad (47)$$

Таким образом, соотношение произведенного родительским поколением и поколением их дочерей при определенном уровне смертности l_x^T, рождаемости φ_x и темпах роста производительности труда k будет следующим:

$$R_A = \frac{\int_0^\infty l_x^T \varphi_x \left(\int_0^\infty l_y^{T+x} a_y e^{k(x+y)} dy \right) dx}{\int_0^\infty l_x^T a_x e^{kx} dx}. \qquad (48)$$

Если смертность не меняется во времени и функция дожития поколения детей и родителей одинакова, т. е. $l_x^{T+x} = l_x^T$, то показатель воспроизводства родительского поколения по объему произведенного будет равен

$$R_A = \int_0^\infty l_x \varphi_x e^{kx} dx. \qquad (49)$$

Важно отметить, что уровень воспроизводства не зависит от повозрастной функции производительности. При нулевом росте производительности труда уровень экономического воспроизводства равен нетто-коэффициенту воспроизводства стабильного населения.

Для сравнения суммарного производства не только поколений родителей и детей, но и вообще разных поколений надо учесть рост численности населения. Если население растет с темпом r, то число родившихся в момент t будет Ne^{rt}, а численность этого поколения в возрасте x будет $Ne^{rt}l_x$. Производительность в этом возрасте составит $a_x e^{k(t+x)}$, и произведут люди этого возраста $A_{t,x} = Ne^{rt}l_x a_x e^{k(t+x)} = Ne^{t(r+k)}l_x a_x e^{kx}$. К возрасту x это поколение произведет $Ne^{t(r+k)}\int\limits_0^\infty a_x l_x e^{kx}\mathrm{d}x$, а за всю жизнь поколение (родившееся в момент t) произведет

$$A_t = Ne^{t(r+k)}\int\limits_0^\infty a_x l_x e^{kx}\mathrm{d}x. \tag{50}$$

То есть суммарный объем произведенного поколением растет от поколения к поколению с темпом, равным сумме темпа роста численности населения и темпа роста производительности труда. С тем же темпом растет из года в год и общий объем произведенного в стабильном населении. В момент t численность населения в возрасте x равна $Ne^{r(t-x)}\,l_x$, их производительность — $a_x e^{xt}$, а общий объем произведенного в момент t составит

$$A_t = Ne^{(r+k)t}\int\limits_0^\infty l_x a_x e^{-rx}dx. \tag{51}$$

В рамках модели стабильного населения можно сопоставить объем производства и потребления в реальном поколении.

Если предположить, что из всего произведенного в момент t некоторая часть Q будет потреблена, то общий объем потребления в момент t равен

$$B_t = QNe^{(r+k)t}\int\limits_0^\infty l_x a_x e^{-rx}dx.$$

Допустим, что соотношения потребления по возрасту не меняются во времени, т. е. в каждый момент относительная величина потребления человека в возрасте x равна b_x. Тогда общее относительное потребление лиц возраста x в стабильном населении составит

$$\beta_x = \frac{b_x N l_x e^{r(t-x)}}{Ne^{rt}\int\limits_0^\infty l_x b_x e^{-rx}dx} = \frac{b_x l_x \mathrm{e}^{-rx}}{\int\limits_0^\infty l_x b_x \mathrm{e}^{-rx}dx}. \quad (52)$$

Таким образом, доля потребления, приходящаяся на лиц возраста x в каждый данный момент, зависит от возрастной структуры населения и от функции b_x. При этом обычно предполагается [8], что функция b_x одномодальна и, плавно поднимаясь с детских возрастов, достигает максимума в зрелости, а затем несколько снижается в старческих возрастах.

Поколение, родившееся в момент t, проходя через возраст x, будет потреблять долю β_x от общего числа потребленного в момент $t+x$, т. е.

$$\beta_x B_{t+x} = QNe^{(r+k)(t+x)}\int\limits_0^\infty l_x a_x e^{-rx}dx\,\frac{b_x l_x e^{-rx}}{\int\limits_0^\infty l_x a_x e^{-rx}dx} =$$

$$= NQe^{(r+k)t} b_x l_x e^{kx}\,\frac{\int\limits_0^\infty l_x a_x e^{-rx}dx}{\int\limits_0^\infty l_x b_x e^{-rx}dx}.$$

К возрасту x это поколение потребит

$$B(x, t) = NQ\mathrm{e}^{(r+k)t}\int\limits_0^x b_x l_x e^{kx}dx\,\frac{\int\limits_0^\infty a_x l_x \mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x}{\int\limits_0^\infty b_x l_x \mathrm{e}^{-rx}\mathrm{d}x}. \quad (53)$$

Сравнить потребленное и произведенное к определенному возрасту можно, получив разность этих величин:

$$\Delta(x) = A(x) - B(x) = Ne^{(r+k)t}\int\limits_0^x a_x l_x \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x -$$

$$- NQe^{(r+k)t}\int\limits_0^x b_x l_x e^{kx}dx\,\frac{\int\limits_0^\infty a_x l_x e^{-rx}dx}{\int\limits_0^\infty b_x l_x e^{-rx}dx}. \quad (54)$$

Упростить выражение можно, приравняв единице число рождений в момент 0 — $N = 1$ при $t = 0$.

Б. Ц. Урланис предусматривал возможность отрицательного баланса, но он это связывал только с низкой занятостью. Из полученного выражения видно, что такой результат возможен и независимо от уровня занятости при определенных сочетаниях смертности, темпов роста населения и темпов роста производительности. Для выявления, в каких случаях возможны отрицательные балансы, с помощью нашей модели целесообразно анализировать не разность, а отношение. Это отношение потребленного к произведенному одним поколением в стабильном населении выглядит следующим образом:

$$\eta = Q\frac{\int\limits_0^\infty b_x l_x e^{kx}dx\int\limits_0^\infty a_x l_x e^{-rx}dx}{\int\limits_0^\infty a_x l_x e^{kx}dx\int\limits_0^\infty b_x l_x e^{-rx}dx}. \tag{55}$$

Оно зависит от уровня смертности (l_x), от повозрастных функций производства и потребления (a_x и b_x), от доли произведенного, идущей на потребление (Q), от темпа роста производительности (k) и от темпа роста населения (r).

В качестве первого шага в анализе полученного соотношения можно предположить, что функция потребления — константа, т. е. что уровень потребления не зависит от возраста; такое предположение, конечно, искусственно, но, по-видимому, несильно исказит результат анализа на качественном уровне. При этом можно предположить, что производство константно в рамках трудоспособного возраста и равно нулю вне этих рамок. При этих условиях

$$\frac{\int\limits_0^\infty a_x l_x e^{-rx}dx}{\int\limits_0^\infty b_x l_x e^{-rx}dx} = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} l_x e^{-rx}dx}{\int\limits_0^\infty l_x e^{-rx}dx},$$

где x_1 и x_2 — границы трудоспособного возраста. Это соотношение равно доле лиц трудоспособного возраста в экспоненциальном населении со смертностью l_x и темпом роста r. Другая часть нашей формулы, преобразованная

Таблица 6

r \ k	0,000	0,020	0,040	0,060	0,080
−0,010	101,7	94,9	77,6	57,3	39,6
−0,005	100,3	93,6	76,6	56,5	39,0
0,000	100,0	93,3	76,3	56,3	38,9
0,005	100,5	93,8	76,7	56,6	39,1
0,010	101,7	94,9	77,6	57,3	39,6
0,015	103,8	96,9	79,2	58,5	40,4
0,020	106,6	99,5	81,4	60,0	41,5

Примечание. $Q^M > 100$ означает, что потребление поколения меньше, чем его производства при любых значениях Q^M.

аналогично, будет иметь вид

$$\frac{\int\limits_0^\infty l_x e^{hx} dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2} l_x e^{hx} dx},$$

т. е. будет равна обратной величине доли населения трудоспособных возрастов в экспоненциальном населении, уменьшающемся с темпом k.

Приняв это упрощение, можно посмотреть, какой предельно большой может быть доля, идущая на потребление (Q^M), чтобы потребление реального поколения не превысило произведенного им. Расчеты этой величины для уровня смертности, равного 20, из этой же модели показывают предельно допустимую долю (в %) произведенного, идущую на потребление Q^M при данном уровне смертности ($e_0 = 65{,}5$) в зависимости от темпа роста населения (r) и темпа роста производительности (k) (при $b_x = 1$; $a_x = 1$ для $15 \leqslant x \leqslant 59$ и $a_x = 0$ для $x < 15$ и $x > 60$) (табл. 6).

В стационарном населении в условиях нерастущей производительности, как и следовало ожидать, чтобы реальное поколение завершило жизненный цикл с нулевым балансом, надо ежегодно потреблять 100% произве-

Таблица 7

r \ k	0,000	0,025	0,050	0,075	0,10
−0,010	97,9	99,8	91,8	79,0	65,9
−0,005	98,7	100,6	92,6	79,6	66,5
0,000	100,0	101,9	93,7	80,7	67,3
0,005	101,7	103,6	95,4	82,1	68,5
0,010	103,9	105,9	97,4	83,8	70,0
0,015	106,6	108,6	100,0	86,0	71,8
0,020	109,8	111,9	103,0	88,6	73,9
0,025	113,6	115,7	106,5	91,6	76,4
0,030	117,8	120,0	110,5	95,0	79,3

См. примеч. к табл. 6.

денного, если эта величина меньше (что всегда бывает), то каждое поколение произведет больше, чем потребит.

Практически то же соотношение получилось для всех вариантов темпа роста населения в условиях нерастущей производительности. В то же время при быстром росте производительности (8%) предельная доля оказывается ниже 50% при любых темпах роста населения. Более подробный анализ полученных величин вряд ли полезен, учитывая искусственность предположений относительно функций производства и потребления, но отмеченная закономерность, по-видимому, является фундаментальной.

Близкие результаты дают расчеты предельной величины Q^M с учетом повозрастных функций производства и потребления из повозрастных экономических пирамид Э. Валковича. Для того же 20-го уровня смертности предельно допустимая доля произведенного, идущая на потребление Q^M при данном уровне смертности ($e_0 = 65{,}5$), темпе роста населения (r) и темпе роста производительности (k) (для a_x и b_x из расчетов Э. Валковича), была следующей (табл. 7).

В этом расчете величины получились несколько больше и предельная величина Q нигде не опускается так низко, как в первом приближении, но основная закономерность та же — чем выше темп роста производительности, тем меньше должна быть доля, идущая на потребление, чтобы общий объем потребленного поколением не превысил объем произведенного им. Ясно, что баланс зависит от формы функций a_x и b_x, и прежде всего, по-видимому, от границ трудоспособного возраста.

В расчетах Э. Валковича принято раннее начало трудовой деятельности и поздний конец. Исторически период трудовой деятельности, по-видимому, имеет тенденцию к уменьшению за счет удлинения периода обучения и развития системы пенсионного обеспечения. Тем самым становится более вероятным появление отрицательного экономического баланса поколений. При этом надо иметь в виду, что отрицательный баланс поколения не есть что-то негативное, это прямое следствие быстрого экономического роста. Он сочетается с ростом производительности, общего объема производства, общего объема потребления и душевого потребления. Систематический отрицательный баланс поколений вовсе не обязательно связан с уменьшением национального богатства. Как указывал Б. Ц. Урланис [8], «убыток» может покрываться за счет других поколений. То есть избыточно потребленное покрывается произведенным более молодыми поколениями, имеющими более высокую производительность.

Приведенная модель экономико-демографических соотношений может служить основой для более детальных построений. Так, можно построить модель для двух полов с учетом различных функций производства и потребления мужчин и женщин, различных функций дожития, демографических инвестиций и т. д. При этом можно получить более точные представления об экономическом балансе реальных поколений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Е. М.* О связи реального и гипотетического поколений // Модели демографических связей. М., 1972. С. 14—39.
2. *Андреев Е. М.*, *Пирожков С. И.* О потенциале демографического роста // Население и окружающая среда. М., 1975. С. 52—67.
3. *Буржуа-Пиша Ж.* Стабильные, полустабильные населения и потенциал роста // Демографические модели. М., 1977. С. 139—163.
4. *Валкович Э.* Экономические возрастные пирамиды // Марксистско-ленинская теория народонаселения. М., 1971.
5. Воспроизводство населения СССР. М., 1982.
6. *Дарский Л. Е.* Формирование семьи. М., 1972.
7. *Сови А.* Общая теория населения. М., 1977.
8. *Урланис Б. Ц.* Экономические аспекты демографии // Проблемы демографии. М., 1971.

9. *Coale A., Demeny P.* Regional model life tables. Princeton, 1966.
10. *Coale A. J.* How age distribution of human population is determined // N. Y.: Cold Spring Harbor, 1957. Vol. XXXVI. P. 83—90.
11. *Depuid P.* Reproduction nette en Europe depuis l'origine de statistique de létat civile. Etudes demographiques. 1941. N 1.
12. *Henry L.* Réflexions sur les taux de reproduction // Population. 1965. N 1.
13. *Keyfitz N., Flieger W.* World population. An analysis of vital data. Chicago; L., 1968.
14. *Lopez A.* Problems in stable population theory. Princeton. N. J. 1961.
15. *Lotka A.* Théorie analitique des assotiations biologiques. Part II. Analise démographique avec application particuliére à l'espèce humaine. P., 1939.
16. *Oechli F. W.* A population model based on life table that includes marriage and parity // Theor. Population Biology, 1975. Vol. 7. N 12. P. 229—245.
17. *Pressat R.* L'analyse démographique concepts. Méthodes — Résultats. P. 1969.